Exercícios Resolvidos
Tema 5: Referenciais e Coordenadas

Gil da Costa marques e Paulo Yamamura

Exercicio 1

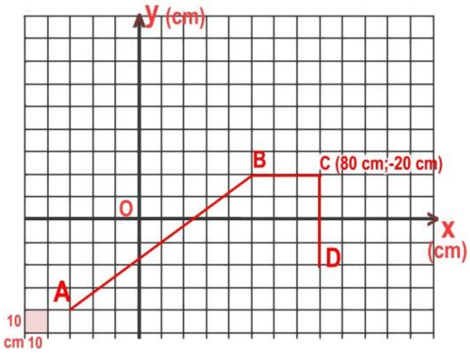
No referencial cartesiano plano (figura abaixo) desenha-se uma poligonal (aberta) ABCD.

No referencial cartesiano a coordenada x também é denominada “abscissa” e a coordenada y é conhecida como “ordenada”.

A forma sintética de escrever um ponto no plano é P(x;y). Assim, a expressão C(80 cm; 20 cm) está a indicar que a abscissa de C é x=80 cm e a respectiva ordenada é y = 20 cm.

a) Escreva, na forma sintética, as coordenadas dos pontos A, B e D?

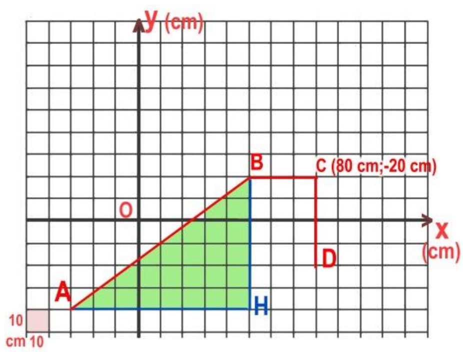
b) A(-30 cm;-40 cm); B(50cm;20cm); D(80cm;-20cm). Agora, qual o comprimento dos segmentos BC e DC ?



c) BC = Δx =(x_C-x_B) = 30cm; DC = Δy = (y_C-y_D) = 40 cm. Agora, qual o comprimento do segmento AB?

Sugestão: considere o triangulo retângulo ABH esquematizado e aplique o Teorema de Pitágoras.

A expressão geral para a distância entre dois pontos A(x_A;y_A) e B(x_B;y_B) no referencial cartesiano, é D = + $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ = $\sqrt{(50-(-30))^2 + (20-(-40))^2}$ = 100 cm.



d) Qual o comprimento da poligonal ABCD?

Resposta: 170 cm.

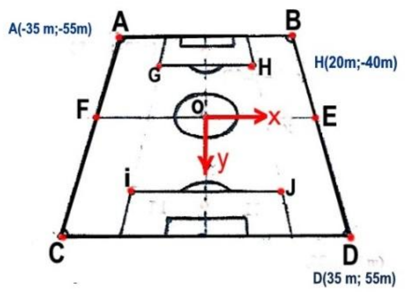
Exercicio 2

A superfície de um campo de futebol é um retângulo de 110x70 m. As marcações das linhas internas são simétricas e os eixos Ox e Oy coincidem com os eixos de simetria que dividem a área em 4 partes iguais.

Num determinado momento de um jogo, um massagista realiza uma corrida em linha reta; ele parte do ponto E para atingir o ponto i.

São fornecidas as coordenadas dos pontos A, H e D e o referencial cartesiano adotado com origem no centro do campo.

Qual a distância percorrida pelo massagista?



Resposta comentada.

A distância Ei pode ser determinada por D_{Ei} = $\sqrt{(\,x_i - \,x_E)^2 + (y_i - y_E\,)^2}$. O eixo Ox divide o campo em duas partes iguais; assim, BE = ED =AF = FC = BD/2 = 55 m pois BD = 110 m. O eixo 0y divide a largura do campo em duas regiões iguais; assim, OE = OF = AB/2 = 70/2 = 35 m. A origem do sistema de coordenadas adotado coincide com o centro do campo. Assim, as coordenadas do ponto E são x_E = 35 m e y_E = 0, ou seja, E(35m;0).

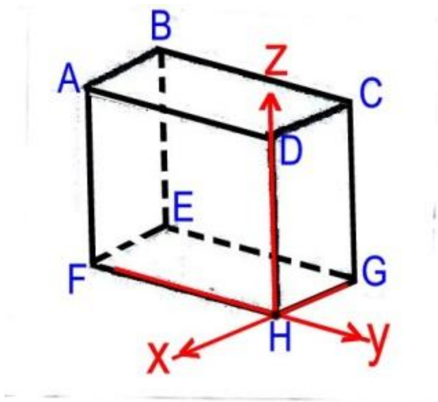
O ponto G é simétrico, em relação ao eixo 0y, ao ponto H(20m;-40m); infere-se que y_G= y_H e x_G = -x_H. Assim, G(-20m;-40m).Sendo o ponto i simétrico, em relação ao eixo 0x, do ponto G, escreve i(-20m;+40m).

Portanto, D_{Ei} = $\sqrt{(\,x_i - \,x_E)^2 + (y_i - y_E\,)^2}$. = $\sqrt{[(-20) - (35)]^2 + [(+40) - (0\,)]^2}$. ≅ 68 m. O massagista corre 68m em linha reta.

Exercicio 3

A estrutura prismática retangular tem altura h = GC = 30 cm; a espessura FE = 20 cm e o comprimento BC = 40 cm. Considere o referencial cartesiano tridimensional adotado com origem no vértice H.

a) Quais as coordenadas x_B, y_B e z_B do vértice B?
b) Qual o comprimento da diagonal BH?



Resposta

a)

- O plano que contem os eixos z e y é o mesmo que contem o plano ADHF e, sendo H a origem do referencial cartesiano, TODOS os pontos da superfície do plano ADFH têm coordenadas x = 0, ou seja, x_A = x_D = x_F = x_H = 0.
- O plano BCGE é paralelo ao plano ADHF, ou seja, paralelo ao plano definido pelos eixos z e y. A distância HG = FE = 20 m separa o plano BCGE do plano zy, porém situado na região onde as coordenadas x são negativas; portanto, x_B = x_C = x_G = x_E = - 20 cm.
- O plano DCGH pertence ao plano xz e passa pela origem; logo, todos os pontos deste plano têm coordenadas iguais a y = 0. Assim, y_D = y_C = y_G= y_H = 0 .
- O plano ABFE é paralelo ao plano DCGH; a distância entre eles é FH = EG =AD =BC = 40 cm, porém, como ele situa na região onde pontos têm coordenadas y $<$ 0. Logo, y_A = y_B = y_G = y_E = - 40 cm.
- Finalmente, os pontos do plano ABCD têm coordenadas z = 30 cm, ou seja, z_A.= z_B = z_C = z_D = 30 cm.

  As coordenadas do vértice B são x_B = - 20 cm; y_B = -40 cm e z_B = 30 cm, logo, escreve-se B(- 20cm; - 40 cm; 30 cm).

b)

A diagonal BH é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos EH = $\sqrt{[(x_H - x_E)]^2 + [(y_H) - (y_E)]^2}$ e EB = $\sqrt{[(z_H \ - \ z_B)]^2}$. Assim, (BH)² = (EH)² + (EB)² =

$[(x_H - x_E)]^2 + [(y_H) - (y_E)]^2$ + $[(z_H\ -\ z_B)]^2$, ou seja, BH =+ $\sqrt{[(x_H - x_E)]^2 + [(y_H) - (y_E)]^2\ +\ [(z_H\ -\ z_B)]^2}$ que é a expressão que permite calcular a distância entre dois pontos num sistema de coordenadas cartesianos no espaço. Substituindo-se os valores das coordenadas envolvidas resulta BH = + 10$\sqrt{29}$ ≅ 53,9 cm.

Exercicio 4

No instante t = 0, um canhão lança um projétil. Os pontos da trajetória do projétil são descritos pelas as equações horárias : x = 60.t ; z = 80.t -5.t² e y = 0. As varáveis são medidas em unidades do SI , ou seja, as coordenadas são medidas em "m" e o tempo t em "s". [Equação horária são equações que envolvem a variável independente tempo]

a) Quais as coordenadas do ponto de lançamento, ou seja, no instante t = 0?

b) Em que instante o projétil passa pelo ponto P(x;0;0)? E qual a coordenada x deste ponto?

c) Se o projétil atinge o solo (z = 0) no ponto Q em t = 20 s, quais as coordenadas de Q?

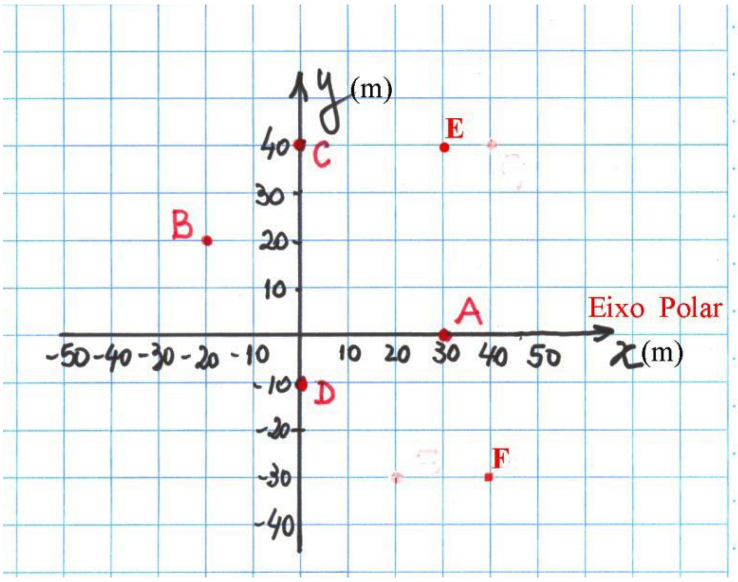
d) Qual a distância do ponto de lançamento ate o ponto Q

Resposta

a) x = 60.t = 60x0 = 0; y = 0; z = 80.t -5.t² = 80x0 – 5x(0)² = 0, ou seja, o ponto de lançamento coincide com a origem do referencial adotado.
b) P(x; 0; 0) indica que z = 80.t – 5.t² = 0, ou seja, t(80 – 5.t) = 0. Logo, t = 0 e t = 16 s, são dois instantes que indicam z =0. Para t = 0 tem-se x = 60x(0) = 0, ou seja, P(0;0;0) que corresponde ao ponto de lançamento. Para t = 16 x tem-se x = 60x(16) = 960 m e z = 80x(16) – 5x(16)² = 0. Assim, para t = 16 s, P(960 m; 0; 0).
c) No instante t = 20 s tem-se x_Q = 60x(20) = 1.200 m ; y_Q= 0 e z_Q = 80x(20) – 5 x(20)² = - 400 m (400 metros abaixo do ponto de lançamento); portanto, Q(1.200m; 0; -400 m).
d) D = $\sqrt{(1200 - 0)^2 + [(-400) - 0]^2}$ = $\sqrt{1.600.000\ m^2}$ ≅ 1.265 m

Exercicio 5

Considere os pontos em evidência no plano cartesiano/polar.



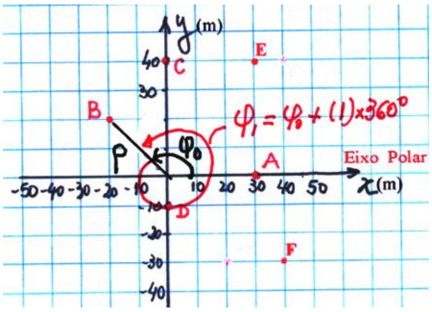
Representar os pontos A,B,C,D,E G em coordenadas cartesianas e em coordenadas polares.

Resposta

Ponto	Coordenadas Cartesianas (em m)	Coordenadas polares $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ (em m); φ = arctan(y/x) (em °)
A	*30; 0*	ρ = 30 m ; φ = 0° + N.360° com N = 0,1,2,3... (*)
B	*-20; 20*	$\rho = 20\sqrt{2}$ m ; φ = 135° + N.360 com N = 1,2,3,..
C	*0; 40*	ρ =40 m ; φ = 90° + N.360 com N = 1,2,3,..
D	*0; -10*	ρ = 10 m ; φ = 270° + N.360 com N = 1,2,3,..
E	*30; 40*	ρ = 50 m ; φ = 53,13° + N.360 com N = 1,2,3,..
F	*40;-30*	ρ = 50 m ; φ = 323,16° + N.360 com N = 1,2,3,..

A variável angular (ou azimute polar) pode assumir infinitos valores. Vejamos:

A coordenada angular ou azimute polar associado a uma coordenada radial pode assumir infinitos valores.



Vejamos. Vamos concentrar no ponto B

- ρ = $\sqrt{(-20)^2 + (20)^2}$ = $\sqrt{2x400}$ = *20*$\sqrt{2}$ *m é a distância do polo 0 até o ponto B (coordenada radial).*
- φ*= arctan(*$\frac{20\ m}{-20\ m}$*) = arctan(-1) = 135° + N.360°. Para N=0, o azimute polar será* φ_0 *= 135° (tan 135° = -1).*

Para N=1, φ_1 *= 135°+(1)360° = 495°, cuja tangente é tan(495°) = -1 e assim por diante.*

(*) tan[0°+(0)360°] = tan[0°+(1).360°] = tan[0°+(2).360°] = tan[0°+(3).360°]......tan(0°+N.360°); assim, a coordenada angular ou azimute polar, pode assumir infinitos valores. Se o caso geral não for solicitado expressamente, a coordenada angular pode ser expressa para N = 0.