Gravitação

1: Introdução

O estudo da gravitação clássica se baseia na lei da Gravitação Universal formlada por Newton. De acordo com essa lei a força que uma partícula de massa m' localizada em $\vec{r}$ exerce sobre outra partícula de massa m localizada em $\vec{r}$ é dada pela expressão

$$F(\vec{r}) = -Gmm'\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}$$

onde G é a constante da gravitação universal.

Pode-se pensar na força sobre a partícula em $\vec{r}\,'$ como resultante da ação provocada pelo campo gravitacional $\left(G\left(\vec{r}\right)\right)m$ criado pela partícula de massa m' localizada em $\vec{r}\,'$. Escrevemos, pois definindo o campo $G\left(\vec{r}\right)$.

$$\vec{F}(\vec{r}) = mG(\vec{r})$$

Assim, o campo gravitacional devido à existência de uma partícula puntiforme de massa m' é

$$\vec{G}(\vec{r}) = -m'G\frac{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}$$

O campo $\vec{G}(\vec{r})$ é claramente conservativo, uma vez que podemos escrever

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

onde $V(\vec{r})$ é potencial gravitacional de uma partícula puntiforme e é dado por:

$$V(\vec{r}) = -\frac{m'G}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}$$

EQUAÇÕES DO CAMPO E POTENCIAL

Lembrando que

$$\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)=4\pi\delta^3\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)$$

então aplicando o laplaciano em ( ) e usando ( ) temos a equação satisfeita pelo potencial, isto é:

$$\vec{\nabla}^2 V\left(\vec{r}\right)=+4\pi G\rho\left(\vec{r}\right)$$

Portanto, a equação satisfeita pelo vetor campo gravitacional é

$$\vec{\nabla}^2\cdot\vec{G}\left(\vec{r}\right)=-4\pi G\rho\left(\vec{r}\right)$$

2: Potencial devido a uma distribuição de massa

O potencial gravitacional associado a uma distribuição de massa discreto de N partículas é

$$V\vec{r}=-G\sum_{i=1}\frac{m}{|\vec{r}-\vec{r}_i\,'|}$$

No caso de uma distribuição contínua, caracterizada por uma densidade volumétrica de massa

$$\rho\left(\vec{r}\right)=\frac{am\left(\vec{r}\right)}{dV}$$

é

$$V\left(\vec{r}\right)=-G\int d^3\frac{\rho\left(\vec{r}\,'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

3: Lei de Gauss para o campo gravitacional

Lembrando o Teorema de Gauss

$$\int_V\vec{\nabla}\cdot\vec{G}^{dV}=\oiint\vec{G}\cdot dS$$

onde o membro do lado direito representa o fluxo de G através da superfície que contém o volume *V*.
Podemos escrever para o fluxo do campo gravitacional que

$$\oiint\vec{G}\cdot dS=-4\pi G\int\rho\left(\vec{r}\right)dV$$

Donde o resultado que relaciona o fluxo de $\vec{G}$ com a massa total *M* no interior da superfície ??

$$\oiint G \cdot dS = -4\pi GM$$

4: Campo gravitacional: simetria esférica

No caso de uma distribuição esfericamente simétrica podemos escrever, usando argumento de simetria que

$$\vec{G}(\vec{r}) = \vec{G}(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Utilizando o teorema de Gauss tomando uma superfície esférica com origem no centro da distribuição obtemos para o fluxo do campo

$$\oiint \vec{G}(\vec{r}) \cdot dS = G(r) \cdot 4\pi r^2$$

Portanto

$$G(r) = -G\frac{M(r)}{r^2}$$

onde $M(r)$ é a massa total no interior da esfera

$$M(r) = 4\pi\int_0^r \rho(\vec{r})dr'r'^2$$

5: Pontos externos à distribuição

Nos pontos externos à distribuição de massa podemos escrever

$$M(r) = M_{\text{TOTAL}}$$

Portanto

$$\vec{G}(r) = -GM_{\text{TOTAL}}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Portanto, o campo gravitacional é aquele equivalente ao de uma carga puntiforme de massa M_{TOTAL} localizado no centro de distribuição.