Autor: Gil da Costa Marques

1: Vetores e Tensores

Algumas grandezas físicas requerem mais do que um atributo (como é o caso das grandezas escalares) para sua completa especificação. Grandezas vetoriais requerem três atributos: Módulo, Direção e Sentido.
A física lida com uma gama muito grande de grandezas físicas. É importante classificar essas grandezas físicas em categorias, ou tipos. A forma que os físicos usam para essa classificação tem a ver com as propriedades de transformação das grandezas físicas (ou suas componentes) sob uma rotação. Lidamos com três tipos de grandezas físicas:

Grandezas Escalares

As grandezas escalares são aquelas invariantes sob uma rotação. Isto é o seu valor não muda quando fazemos uma rotação do sistema. Por exemplo, a distância entre dois pontos é uma grandeza física invariante sob rotações. Logo, a distância entre dois pontos é uma grandeza escalar

Grandezas Vetoriais

Algumas grandezas físicas requerem mais do que um atributo (como é o caso das grandezas escalares) para sua completa especificação. Grandezas vetoriais requerem três atributos: Módulo, Direção e Sentido.

Veremos que as grandezas vetoriais requerem três atributos, os quais designaremos por coordenadas.

Grandezas Tensoriais

Uma grandeza tensorial é uma mera generalização de uma grandeza escalar. Isto será entendido quando analisarmos rotações. De modo geral um tensor é caracterizado por um posto. O posto de um tensor é um número inteiro positivo ou zero. Um tensor de posto zero é um escalar. Ou grandeza escalar. Um tensor de posto 1 é um vetor.

Rotações

Uma vez definida a matriz de rotação $R(\theta,\phi,\psi)$ podemos definir vetores, de uma maneira geral, e tensores.

Um vetor é um ente físico definido por três quantidades v1, v2, v3 de tal forma que sob uma rotação ele se transforma da mesma forma que as coordenadas. Isto é,

$$|\vec{v}\,'\rangle = R|v\rangle$$

onde

$$\left|\vec{V}'\right\rangle = \begin{matrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{matrix} \qquad \left|\vec{V}\right\rangle = \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{matrix}$$

ou seja, cada coordenada se transforma como

$$V_i' = \sum R_{ij} V_j$$

Podemos definir agora um tensor como um objeto de 9 componentes, T11...T33, de tal forma que sob uma rotação ele se transforma

$$T \to T'$$

onde

$$T_{ij}' = \sum_k \sum_l R_{ik} R_{jl} T_{kl} \, .$$

Mais geralmente, definimos um tensor de posto S como um objeto 3S de componente tal que essas componentes se transformam como

$$T_{i_1 - i_3}' = \sum_{j_1} \ldots \sum_{j_3} R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \ldots R_{i_3 j_3} T_{j_1 \ldots j_3} \, .$$

Podemos escrever essa transformação sob a forma

$$T' = RTR^{-1} \, .$$

Transformações como essa são denominadas transformações de semelhança.
Um tensor é dito simétrico se

$$T_{ij} = T_{ji}$$

e anti-simétrico se

$$T_{ij} = -T_{ji} \, .$$

O traço de um tensor é dado pela soma dos elementos da diagonal da matriz 3 x 3. Isto é

$$T_r(T) = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \sum T_{ii} \; .$$

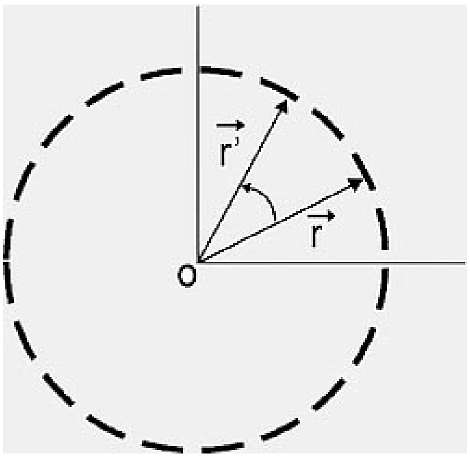
O determinante de T é o determinante da matriz, isto é

$$\det(T) = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} .$$

2: Rotações

O movimento é de rotação pura se a direção e o sentido do vetor posição mudam, ou seja, se apenas o módulo do vetor permanece constante.
O que caracteriza o movimento em geral é a variação do vetor de posição. Dizemos assim que houve movimento se o vetor de posição r passou para outro vetor de posição r', isto é,

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}\,'$$



Nós dizemos que o movimento é de rotação pura se a direção e o sentido do vetor posição mudam, ou seja, se apenas o módulo do vetor permanece constante. Portanto, numa rotação pura:

$$|\vec{r}\,'| = |\vec{r}|$$

3: Diagonalização de um tensor simétrico

Um tensor de 9 componentes tem a forma geral:

$$T_{ij} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}.$$

Pode-se escolher, mediante uma rotação, um sistema de eixos tais que, nesses novos eixos, a matriz T simétrica tem a forma diagonal. Isto é,

$$T' = \begin{vmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T'_2 & 0 \\ 0 & 0 & T'_3 \end{vmatrix}.$$

Os valores T'_{11}, T'_{22} e T'_{33} são denominados autovalores de ou ainda valores característicos de T.
Os novos eixos x, y e z são tais

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Esses novos eixos são ortogonais entre si, isto é

$$\vec{i}' = R_{11}\vec{i} + R_{12}\vec{j} + R_{13}\vec{k}$$
$$\vec{j}' = R_{21}\vec{i} + R_{22}\vec{j} + R_{23}\vec{k}$$
$$\vec{k}' = R_{31}\vec{i} + R_{32}\vec{j} + R_{33}\vec{k}$$

são tais que

$$\vec{i}'\cdot\vec{j} = 0 \quad \vec{i}'\cdot\vec{k} = 0 \text{ e } \vec{j}\cdot\vec{k}' = 0$$

uma vez que

$$RR^{-1} = RR^T = \vec{I}\ .$$

Estes novos eixos são conhecidos como eixos principais. Qualquer vetor $\vec{V}$ paralelo aos eixos principais é um autovetor de T e para ele vale

$$T\left|\vec{V}\right\rangle = T_i\left|\vec{V}\right\rangle .$$

Essa equação é conhecida como equação de autovalores e ela se escreve

$$\left(T - T'\vec{I}\right)\cdot\vec{C} .$$

Em termos das componentes podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\left(T_{11} - T'\right)v_1 + T_{12}v_2 + T_{13}v_3 = 0 \\
&T_{21}v_1 + \left(T_{22} - T'\right)v_2 + T_{23}v_3 = 0 . \\
&T_{31}v_1 + T_{32}v_2 + \left(T_{33} - T'\right)v_3 = 0
\end{aligned}$$

Teremos soluções diferentes da trivial ($v_1 = v_2 = v_3 = 0$) sob e somente se o determinante associado a essa linear homogênea for nulo, isto é:

$$\begin{vmatrix} T_{11} - T & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - T' & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - T' \end{vmatrix} = 0 .$$

A equação acima exibe três soluções independentes (pode haver casos de soluções degeneradas as quais serão tratadas posteriormente). Estas raízes T'_1, T'_2 e T'_3 são os autovalores procurados. Isto é, são os valores de T na forma diagonal.
Para cada valor de T'(T'_1, T'_2 e T'_3) obteremos os vetores $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ e $\vec{V}_3$. Os vetores $\vec{i}\,'$, $\vec{j}\,'$ e $\vec{k}\,'$ são dados por

$$\vec{i}\,' = \frac{\vec{V}_1}{\left|\vec{V}_1\right|} \qquad \vec{j}\,' = \frac{\vec{V}_2}{\left|\vec{V}_2\right|} \qquad \vec{k}\,' = \frac{\vec{V}_3}{\left|\vec{V}_3\right|} .$$