Autor: Gil da Costa Marques

1: Introdução

A análise das colisões elásticas no caso geral fica enormemente facilitada pelo uso do sistema centro de massa e o uso das coordenadas em relação a esse sistema ($\bar{\vec{r}}_1$ e $\bar{\vec{r}}_2$). Lembrando que em relação ao **centro de massa.**

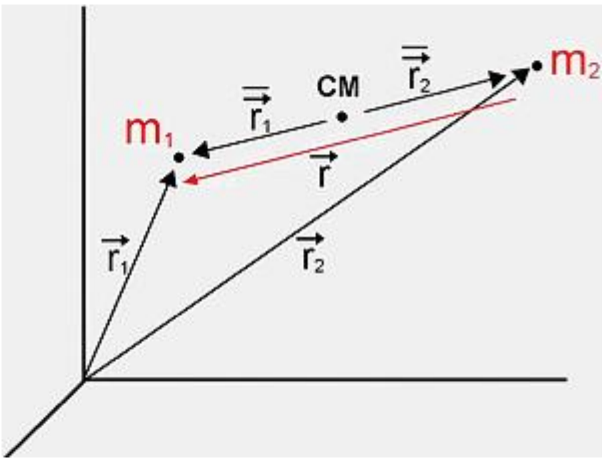
$$m_1\bar{\vec{r}}_1 + m_2\bar{\vec{r}}_2 = 0$$

e que a coordenada relativa é definida por

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \bar{\vec{r}}_1 - \bar{\vec{r}}_2 \,,$$

temos

$$\bar{\vec{r}}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \qquad \text{e} \qquad \bar{\vec{r}}_2 = -\frac{m_{2'}}{m_1 + m_2}\vec{r}$$



e, portanto, as velocidades das duas partículas relativas ao centro de massa são:

$$\bar{\vec{v}}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v} \qquad \text{e} \qquad \bar{\vec{v}}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v} \,,$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade de m_1 com respeito a m_2 .

Numa **colisão elástica**, a conservação da energia cinética nos leva a

$$\frac{\mu}{2}\vec{v}^{(i)^2} = \frac{\mu}{2}\vec{v}^{(f)^2}$$

onde $\vec{v}^{(i)}$ e $\vec{v}^{(f)}$ são as velocidades relativas no estado inicial e no estado final e

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

é a massa reduzida. Temos, portanto

$$\left|\vec{v}^{(i)}\right| = \left|\vec{v}^{(f)}\right|$$

e consequentemente, só existe uma mudança de direção na velocidade relativa. Escrevemos, portanto

$$\vec{v}^{(f)} = v^{(i)}\vec{e}_f$$

onde $\vec{e}_f$ é um versor que indica a direção na velocidade relativa no estado final.

A partir desses resultados podemos escrever

$$\vec{v}_1^{(f)} = \frac{m_2}{m_1+m_2}v^{(i)}\vec{e}_f + \frac{m_1\vec{v}_1^{(i)} + m_2\vec{v}_2^{(i)}}{m_1+m_2},$$

$$\vec{v}_2^{(f)} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}v^{(i)}\vec{e}_f + \frac{m_1\vec{v}_1^{(i)} + m_2\vec{v}_2^{(i)}}{m_1+m_2},$$

onde o último termo é a velocidade constante do centro de massa.

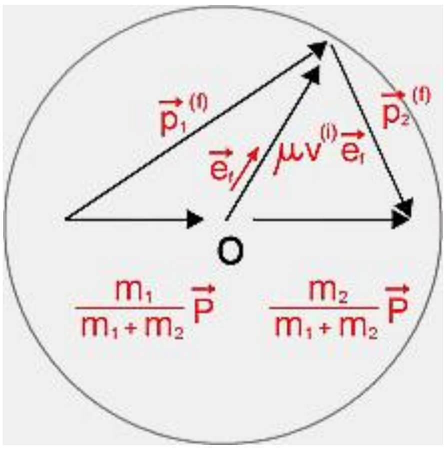
Portanto,

$$\vec{p}_1^{(f)} = \mu v^{(i)}\vec{e}_f + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{P}$$

$$\vec{p}_2^{(f)} = -\mu v^{(i)}\vec{e}_f + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{P}$$

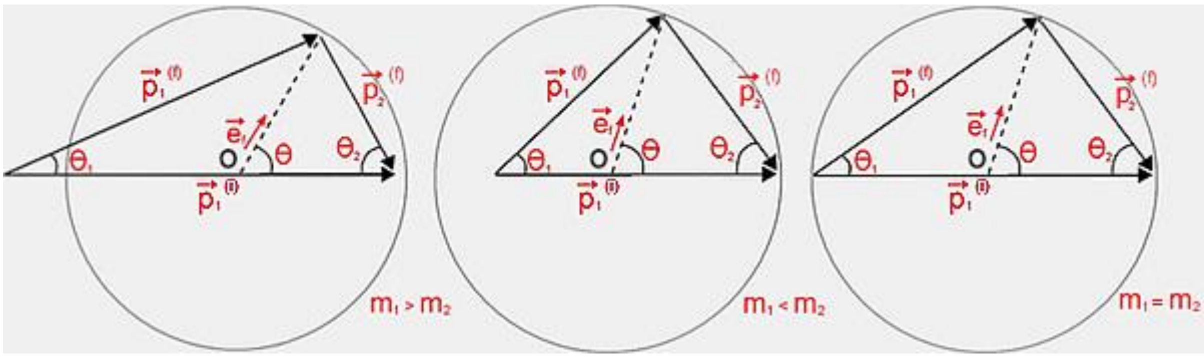
onde $\vec{P}$ é o **momento linear total** (constante) em relação ao sistema de laboratório.

Utilizando vetores, temos o seguinte diagrama para as equações acima:



Se uma das partículas (digamos a partícula 2) estiver em repouso, temos as três possibilidades abaixo:

Autor: Gil da Costa Marques



Os ângulos θ_1, e θ são ângulos de espalhamento da partícula 1 como vistos nos dois sistemas. O ângulo θ_2 é o ângulo de recuo da partícula 2 no sistema de laboratório.

Os diagramas das figuras anteriores são muito úteis para obtermos todos os parâmetros a partir de apenas um, dado como conhecido.

Por exemplo, uma simples inspeção geométrica nos fornece a seguinte relação entre os ângulos θ_1, e θ.

$$\tan\theta = \frac{m_1 m_2 v_1^{(i)} sen\theta}{m_1 m_1 v_1^{(i)} + m_1 m_2 v_1^{(i)} \cos\theta} = \frac{sen\theta}{\dfrac{m_1}{m_2} + \cos\theta}$$

Vemos também que

$$\pi = \theta + 2\theta_2$$

isto é,

$$\theta_2 = \frac{\Pi - \theta}{2}.$$

Tomando o quadrado de

$$\vec{v}_1^{(f)} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v^{(i)} \vec{e}_f + \frac{m_1 \vec{v}_1^{(i)} + m_2 \vec{v}_2^{(i)}}{m_1 + m_2}$$

e

$$\vec{v}_2^{(f)} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v^{(i)} \vec{e}_f + \frac{m_1 \vec{v}_1^{(i)} + m_2 \vec{v}_2^{(i)}}{m_1 + m_2}$$

vemos que

$$(m_1 + m_2)^2 v_1^{(f)^2} = \left(m_1^2 + m_2^2 + 2 m_1 m_2 \cos\theta\right) v_1^{(i)^2}$$

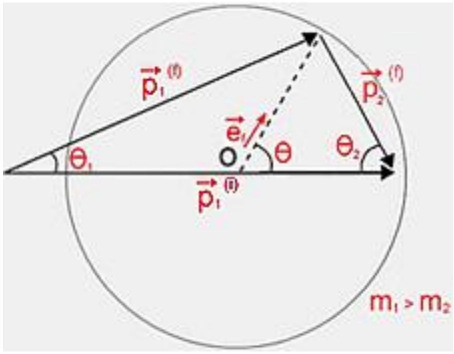
e

$$\left(m_1+m_2\right)^2 v_2^{(f)^2}=4m_1^2 v_1^{(i)^2} sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Vamos analisar os três casos relevantes.

a) $\mathbf{m_1 > m_2}$

Observando a figura notamos que, nesse caso,

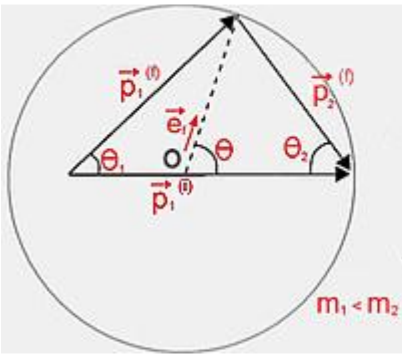


$$\theta_1+\theta_2<\frac{\pi}{2}$$

e o ângulo θ_1 atinge um valor máximo dado por

$$sen\theta_{1\max}=\frac{m_2}{m_1}$$

b) $\mathbf{m_1 < m_2}$



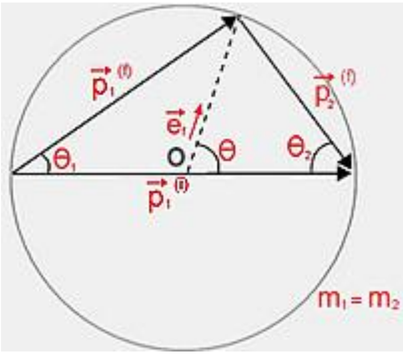
Nesse caso a velocidade $\vec{v}_1^{(f)}$ da primeira partícula pode ter qualquer direção. Nesse caso

$$\theta_1+\theta_2>\frac{\pi}{2}$$

c) $\mathbf{m_1 = m_2}$

Todas as equações e resultados se simplificam. Olhando para a figura vemos que

$$\theta_1=\frac{\theta}{2}$$



De $\left(m_1+m_2\right)^2 v_1^{(f)^2}=\left(m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos\theta\right)v_1^{(i)^2}$

e

$$\left(m_1+m_2\right)^2 v_2^{(f)^2}=4m_1^2 v_1^{(i)^2} sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

segue que

$$v_1^{(f)}=v_1^{(i)}\cos\frac{\theta}{2} \qquad v_2^{(f)}=v_1^{(i)}sen\frac{\theta}{2}$$

Autor: Gil da Costa Marques

2- Colisões analisadas do sistema centro de massa

A colisão vista do sistema centro de massa é, em alguns casos, bem mais simples que do sistema do laboratório.

caso da colisão entre duas partículas temos que, em função de $m_1\vec{\bar{r}}_1 + m_2\vec{\bar{r}}_2 = 0$,

$$\vec{\bar{p}}_1^{(i)} + \vec{\bar{p}}_2^{(i)} = 0 \quad ,$$

o mesmo valendo para o estado final, isto é

$$\vec{\bar{p}}_1^{(f)} + \vec{\bar{p}}_2^{(f)} = 0 \quad .$$

Portanto, visto do sistema centro de massa as duas partículas estarão sempre em movimento.

Sendo $\vec{v}$ a velocidade relativa das duas partículas, podemos escrever

$$\vec{\bar{v}}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v} \qquad \vec{\bar{v}}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}$$