Autor: Gil da Costa Marques

1: Introdução

A dinâmica newtoniana é voltada para o estudo do movimento de objetos puntiformes (por isso dizemos a dinâmica do ponto). Como sabemos, os objetos que se movem no nosso Universo se encontram em constante interação com os demais. Dessa forma o interesse maior na mecânica é o estudo de um sistema de partículas.

Nesse capítulo analisaremos as leis gerais do movimento de um sistema de N partículas. Esse número N pode ser relativamente pequeno como 2 ou 3 até um número muito grande. Faremos uma análise bastante geral, isto é, não especificaremos o número de partículas que compõe o sistema. Consideremos um sistema composto por N partículas. A posição da i-ésima partícula é $\vec{r}_i$. Sobre ela imaginemos que atuem as **forças internas** (isto é, devido as demais partículas do sistema) e as **forças externas** (estas devido a partículas ou objetos que não pertencem ao sistema). Podemos assim escrever para a força sobre a i-ésima partícula:

$$\vec{F}^{\,i} = \vec{F}^{\,i}_{ext} + \vec{F}^{\,i}_{\text{int}} \,.$$

As forças internas sobre a i-ésima partícula podem ser escritas como uma soma:

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 0$$

onde $\vec{F}_{ij}$ é a força exercida pela j-ésima partícula sobre a i-ésima partícula. Sabemos, ademais, pela terceira lei de Newton, que:

$$\vec{F}_{ij} = \vec{F}_{ji} \,.$$

Utilizando agora a segunda lei de Newton, podemos escrever, para cada uma das partículas as quais designamos por 1, 2, 3, ..., N

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \cdots + \vec{F}_{1N}$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \cdots + \vec{F}_{2N}$$

$$\frac{d\vec{p}_3}{dt} = \vec{F}_3^{ext} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \cdots + \vec{F}_{3N}$$

.

.

.

$$\frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{F}_N^{ext} + \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \vec{F}_{N3} \cdots + \vec{F}_{NN-1}$$

2: Conservação do momento linear

Se adicionarmos as equações ( ) verificaremos que os termos das forças internas na somatória se anulam. Isto decorre de ( ). Portanto, podemos escrever para a soma

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{ext} .$$

Definindo o momento linear total do sistema como a soma dos momentos de cada uma das partículas

$$\boxed{\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i} .$$

Podemos, portanto escrever.

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{ext}}$$

ou seja, a taxa com que o momento linear total do sistema varia com o tempo é igual à soma das forças externas.

Um resultado muito importante que segue de ( ) é que na ausência de forças externas ou se o resultado for nulo

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{ext} = 0 .$$

Então de ( ) segue que o momento linear se conserva

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = 0}$$

e, consequentemente

$$\vec{P} = \vec{P}_0$$

onde $\vec{P}_0$ é um vetor constante.

Este resultado vale independentemente da natureza das forças internas.

3: O centro de massa

A despeito de ser muito difícil, em geral, determinar a posição e a velocidade de qualquer uma das partículas do sistema (tendo em vista a dificuldade de encontrarmos a solução exata para o sistema de equações ( )) existe um ponto no sistema de partículas cujo movimento em um bom número de casos é previsível. Esse ponto é o centro de massa. O centro de massa é definido pelas suas coordenadas R_x, R_y, e R_z dadas pelas expressões:

$$R_x = \frac{1}{M}\sum_{i-1}^{N} m_i x_i = \frac{1}{M}\left(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_N x_N\right)$$
$$R_y = \frac{1}{M}\sum_{i-1}^{N} m_i y_i = \frac{1}{M}\left(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_N y_N\right) \quad ,$$
$$R_z = \frac{1}{M}\sum_{i-1}^{N} m_i z_i = \frac{1}{M}\left(m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_N z_N\right)$$

onde m de M é a massa total do sistema de partículas

$$M = \sum_{i-1}^{N} m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_N \ .$$

Podemos assim escrever, vetorialmente, que o vetor de posição do centro de massa ($\vec{R}$) é dado por

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i \ .$$

No caso de um sistema composto por um número muito grande de partículas é preferível tratá-lo como uma distribuição contínua de partículas e não discreta. Nesse caso, um dos conceitos mais relevantes é a densidade. A densidade de massa é definida como a relação entre a quantidade de massa dm contida num elemento infinitesimal de volume dV. Definimos, portanto

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm(\vec{r})}{dV}$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição do elemento de volume dV.

Dada a densidade volumétrica de massa podemos calcular a massa total através da integral de volume da densidade

$$M = \iiint \rho(\vec{r})dV \ .$$

Para uma distribuição contínua de massa o centro de massa é dado por

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\iiint \vec{r}\rho(\vec{r})dV \ .$$

4: Movimento do centro de massa

O movimento do centro de massa é bastante simples. Para entendermos isso notamos primeiramente que

Autor: Gil da Costa Marques

$$\sum m_i \vec{V}_i = \sum \vec{p}_i = M\,\frac{d\vec{R}}{dt}$$

e, portanto, a taxa de variação do vetor posição do centro de massa vezes a massa total é igual ao movimento linear total

$$\vec{P} = M\,\frac{d\vec{R}}{dt}\,.$$

Consequentemente, de ( ) e ( ) segue que

$$M\,\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i-1}^{N} \vec{F}_{ext}^{(i)}\,.$$

Assim, o centro de massa é tal que ele se movimenta como se todas as forças externas estivessem atuando sobre ele. Não é assim muito difícil determinar a posição do centro de massa de um sistema de partículas.

No caso em que as forças externas se anulam ou são nulas, temos que

$$M\,\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 0$$

e, portanto, o centro de massa tem um movimento retilíneo e uniforme independentemente das forças internas.

5: Sistema de duas partículas

Consideremos o caso mais simples de um sistema de partículas. Aquele composto por apenas duas partículas. Nesse caso as equações ( ) se reduzem a apenas duas:

$$m_1\,\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{ext}^{1} + \vec{F}_{12}$$

$$m_2\,\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{ext}^{2} + \vec{F}_{21}$$

No caso do sistema constituído por apenas duas partículas definimos além do centro de massa

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

a coordenada relativa

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

definimos, além da massa total,

$$M = m_1 + m_2$$

a massa reduzida

Autor: Gil da Costa Marques

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\Rightarrow \mu=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} .$$

A utilidade das grandezas físicas assim definidas podem ser entendidas ao adicionarmos e subtrairmos as equações ( ). A adição nos leva a

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}=\vec{F}^1_{ext}+\vec{F}^2_{ext} .$$

Ao passo que a subtração nos leva, depois de dividirmos a primeira equação por m_1 e a segunda por m_2, a

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)=\frac{\vec{F}^{(1)}_{ext}}{m_1}-\frac{\vec{F}^{(2)}_{ext}}{m_2}+\frac{1}{\mu}\vec{F}_{12} .$$

A primeira equação representa o resultado já conhecido de que o centro de massa se move de tal maneira que tudo se passa como se todas as forças externas estivessem atuando sobre ele.

Para entendermos a relevância da coordenada relativa e de massa reduzida consideremos o caso em que o sistema de duas partículas não está sujeito a forças externas. Nessas circunstâncias as equações ( ) se escrevem agora

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}_{12}(\vec{r})$$

$$M\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=0$$

Uma vez conhecida a força (ou forças) de interação entre as duas partículas podemos determinar a partir de ($\vec{r}(t)$) e utilizando ($\vec{R}(t)$). Uma vez conhecidos $\vec{r}(t)$ e $\vec{R}(t)$ podemos determinar $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ utilizando ( ). Isto é

$$\vec{r}_1(t)=\vec{R}+\frac{m_2}{M}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2(t)=\vec{R}'+\frac{m_1}{M}\vec{r}$$

6: O centro de massa como sistema de referência

Em muitos casos é útil fazer uso de um sistema de coordenadas cuja origem coincide com o centro de massa do sistema. Assim a posição de uma partícula genérica do sistema (i-ésima partícula) é dada por

$$\vec{r}_i=\vec{R}+\vec{r}_i .$$

Sua velocidade é composta por dois termos

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\bar{\vec{r}}_i}{dt} = \vec{V}_{CM} + \bar{\vec{V}}_i$$

onde $\bar{\vec{V}}_i$ representa a velocidade de partícula relativa ao sistema centro de massa. A aceleração é dada por

$$\vec{a}_i = \vec{a}_{CM} + \bar{\vec{a}}_i$$

onde, novamente aqui, a barra representa a grandeza (no caso a velocidade) relativa ao centro de massa.

Multiplicando a equação ( ) por m_i, efetuando a soma e lembrando ( ) notamos uma propriedade da coordenada relativa ao centro de massa. Tal propriedade se resume, assim

$$\sum_{m_i} m_i \vec{r}_i{}' = 0\,.$$

Se considerarmos um sistema contínuo, então a propriedade análoga ( ) para um sistema contínuo é:

$$\iiint \rho(r)\bar{\vec{r}}dV = 0\,.$$

Veremos que a propriedade ( ), ou equivalentemente ( ), é muito útil na simplificação da expressão de várias grandezas físicas quando expressas em termos do centro de massa.

7: Momento angular de um sistema de partículas

O momento angular de uma partícula é dado por

$$\vec{L}' = \vec{r} \times \vec{p}$$

e a taxa de variação do momento angular em respeito ao tempo é

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\,.$$

O primeiro termo se anula uma vez que $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{p}$. Utilizando a lei de Newton, escrevemos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}\,.$$

O lado direito da equação acima é o torque da força definido como

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

portanto, a taxa de variação do momento angular é igual ao torque aplicado pela força agindo sobre o corpo. Portanto

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \; .$$

Para um sistema de partículas, o momento angular total é dado por

$$\vec{L} = \sum_{i-1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i-1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{V}_i \; .$$

No caso de uma distribuição contínua de partículas escrevemos para o momento angular

$$\vec{L} = \iiint p(\vec{r})\vec{r} \times \vec{V} dV \; .$$

Utilizando o sistema centro de massa verificamos que de ( ) e ( )

$$\vec{L} = \sum \vec{R} \times \vec{P} + \sum \vec{\bar{r}}_i \times \vec{\bar{p}}_i \; .$$

e, portanto, o momento angular do sistema pode ser expresso como o momento angular do centro de massa mais o momento angular de cada uma das partículas relativas ao centro de massa.

8: A conservação do momento angular total

A taxa de variação do momento angular total é dada por

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i-1}^{N} \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_{ext}^{1} + \sum_{j-1}^{N} \vec{F}_{ij} \right)$$

$$= \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext}^{(i)} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i \neq j}^{N} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \right)$$

lembrando a terceira lei de Newton, notamos que o último termo se escreve

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{i \neq j}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i \neq j}^{N} \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j \right) \times \vec{F}_{ij} \; .$$

Como $\vec{F}_{ij}$ é paralelo a $\vec{r}_i - \vec{r}_j$, temos

$$\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j \right) \times \vec{F}_{ij} = 0 \, .$$

Donde o resultado que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext}^{(i)}$$

ou seja, a taxa de variação com o tempo, do momento angular total é igual à soma dos torques das forças externas

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_i \tau_{ext}^{(i)}=\sum_{i-1}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ext}^{(i)}\ .$$

No caso em que esses torques se anulem ou tornem nulos temos o resultado de que o momento angular total deve ser conservado, isto é:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=0\ .$$

9: Energia cinética de um sistema de partículas

A energia cinética do sistema é dada pela soma de energia cinética de cada uma das partículas que o compõe. Temos assim

$$E_0=\sum\frac{m_i}{2}\vec{r}^{\,2}=\sum_2 m_i\vec{V}_i^2\ .$$

Considerando-se o sistema centro de massa, utilizando a definição ( ) temos

$$E_0=\sum_{i-1}^{N}m_i\frac{\vec{R}^2}{2}+\vec{R}\sum m_i\vec{\bar{r}}+\sum\frac{m_i}{2}\vec{\bar{r}}_i\ .$$

Tendo em vista a propriedade ( ) o segundo termo se anula e, portanto

$$E_0=\frac{M}{2}\vec{R}^2+\frac{1}{2}\sum_{i-1}^{N}\vec{\bar{r}}^{\,2}\ .$$

E, portanto, a energia cinética é dada pela energia cinética do centro de massa mais a energia cinética das partículas no seu movimento relativo ao centro de massa.

10: Energia potencial do sistema

Admitindo que as forças externas sejam conservativas teremos

$$\vec{F}_{ext}^{\,i}=-\vec{\nabla}_i U_{ext}(\vec{r}_i)$$

onde

$$\vec{\nabla}_i U_{ext}=\frac{\partial U_{ext}}{\partial x_i}\vec{i}+\frac{\partial U_{ext}}{\partial y_i}\vec{j}+\frac{\partial U_{ext}}{\partial z_i}\vec{k}\ \ .$$

Admitindo ainda que as forças internas são conservativas, isto é, admitindo que

$$\vec{F}_{ij}=-\vec{\nabla}_i U^{in}(\vec{r}_j-\vec{r}_j)$$

onde

$$\vec{\nabla}_{ij}U^{in}=\frac{\partial U^{in}}{\partial(x_i-x_i)}\vec{i}+\frac{\partial U^{in}}{\partial(y_i-y_i)}\vec{j}+\frac{\partial U^{in}}{\partial(z_i-z_i)}\vec{k}\ .$$

Autor: Gil da Costa Marques

Então a energia potencial do sistema será dada por

$$U = \sum_{i-1}^{N} U_{ext}(\vec{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}\sum_{i=1} U\left(\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|\right)$$