Autor: Gil da Costa Marques

1: Introdução

O estudo da gravitação clássica se baseia na **lei da Gravitação Universal** formulada por Newton. De acordo com essa lei a força que uma partícula de massa m' localizada em $\vec{r}\,'$ exerce sobre outra partícula de massa m localizada em $\vec{r}$ é dada pela expressão

$$F(\vec{r}) = -Gmm'\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}$$

onde G é a constante da gravitação universal.

Pode-se pensar na força sobre a partícula em $\vec{r}$ como resultante da ação provocada pelo campo gravitacional $G(\vec{r})m$ criado pela partícula de massa m' localizada em $\vec{r}\,'$. Escrevemos, pois definindo o campo $G(\vec{r})$

$$\vec{F}(\vec{r}) = mG(\vec{r}).$$

Assim, o campo gravitacional devido à existência de uma partícula puntiforme de massa m' é

$$\vec{G}(\vec{r}) = -m'G\frac{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}.$$

O campo $G(\vec{r})$ é claramente conservativo, uma vez que podemos escrever

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

onde $V(\vec{r})$ é potencial gravitacional de uma partícula puntiforme e é dado por:

$$V(\vec{r}) = -\frac{m'G}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}.$$

Autor: Gil da Costa Marques

2: Equações do campo e potencial

Lembrando que

$$\vec{\nabla}^2 = \left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\right) = 4\pi\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

então aplicando o laplaciano em e usando temos a equação satisfeita pelo potencial, isto é:

$$\vec{\nabla}^2 V(\vec{r}) = +4\pi G\rho(\vec{r}) \quad \vec{\nabla}^2\ V(\vec{r}) = +4\pi\, G\, \rho(\vec{r}).$$

Portanto, a equação satisfeita pelo vetor campo gravitacional é

$$\vec{\nabla}^2 \vec{G}(\vec{r}) = -4\pi G\rho(\vec{r}).$$

3: Potencial devido a uma distribuição de massa

O potencial gravitacional associado a uma distribuição de massa discreto de N partículas é

$$V(\vec{r}) = -G\sum_{i=1}\frac{m_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}.$$

No caso de uma distribuição contínua, caracterizada por uma densidade volumétrica de massa

$$\rho(\vec{r}) = \frac{am(\vec{r})}{dV}$$

é

$$V(\vec{r}) = -G\int d^3\vec{r}\,'\frac{\rho(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}.$$

4: Lei de Gauss para o campo gravitacional

Lembrando o Teorema de Gauss

$$\int_V \nabla\cdot\vec{G}^{dv} = \oiint \vec{G}\cdot dS$$

Autor: Gil da Costa Marques

onde o membro do lado direito representa o fluxo de $\vec{G}$ através da superfície que contém o volume V.

Podemos escrever para o fluxo do campo gravitacional que

$$\oiint \vec{G} \cdot dS = 4\pi G \int \rho(\vec{r}) dV \, .$$

Donde o resultado que relaciona o fluxo de com a massa total M no interior da superfície:

$$\oiint G \cdot dS = -4\pi GM \, .$$

5: Campo gravitacional : simetria esférica

No caso de uma distribuição esfericamente simétrica podemos escrever, usando argumento de simetria que

$$\vec{G}(\vec{r}) = G(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Utilizando o teorema de Gauss tomando uma superfície esférica com origem no centro da distribuição obtemos para o fluxo do campo

$$\oiint \vec{G}(\vec{r}) \cdot dS = G(r) \cdot 4\pi r^2 .$$

Portanto

$$G(r) = -G\frac{M(r)}{r^2}$$

onde M(r) é a massa total no interior da esfera

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') dr' r'^2$$

6: Pontos externos à distribuição

Nos pontos externos à distribuição de massa podemos escrever

$$M(r) = M_{\text{total}} \, .$$

Portanto

Autor: Gil da Costa Marques

$$\vec{G}(r) = -GM_{\text{total}} \frac{\vec{r}}{r^3} .$$

Portanto, o campo gravitacional é aquele equivalente ao de uma carga puntiforme de massa M_{total} localizado no centro de distribuição.