Autor: Gil da Costa Marques

1: Movimento dos projéteis

Consideraremos o caso do movimento de partículas sujeitas a campos elétrico e magnético.

Suponhamos que a força dependa apenas das posições x e y e v_x, v_y. Nesse caso escrevemos para a lei de Newton

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_y(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$$

Admitiremos que não existe movimento na direção z.

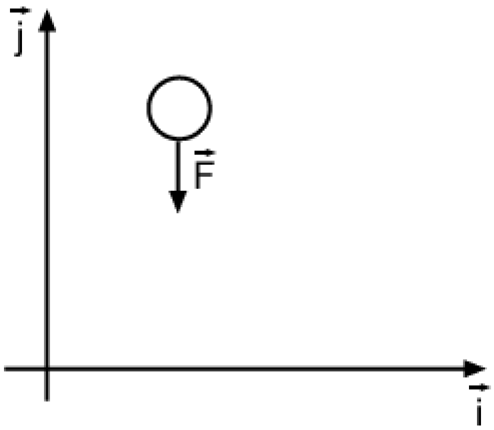
Um exemplo muito simples é aquele do movimento dos projéteis na superfície. Se adotarmos o eixo paralelo à superfície terrestre e o eixo na direção perpendicular à superfície teremos, desprezando a força de resistência do ar,

$$\vec{F} = -mg\vec{j}$$

e, portanto:

$$F_y = -mg$$

$$F_x = 0$$



Substituindo as expressões acima com as iniciais encontramos as equações fundamentais do movimento dos projéteis, isto é

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow v_x = v_{0x}(\text{constante})$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg \Rightarrow v_y = v_{0x} + gt$$

obtemos, portanto que

$$\frac{dx}{dt} = v_{0x}(\text{constante})$$

$$\frac{dy}{dt} = v_{0y} + gt$$

A solução das equações acima é:

$$v_y = v_{0y} - g\left(t - t_0\right)$$

$$y = y_0 + v_{0y}\left(t - t_0\right) - \frac{g}{2}\left(t - t_0\right)^2$$

$$v_x = v_{0x}$$

$$x = x_0 + v_{0x}\left(t - t_0\right)$$

e as equações básicas do movimento de projeteis:

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{gt^2}{2}$$

2: Trajetória levando em conta a resistência do ar

Na seção anterior determinamos a trajetória da partícula, mas não levamos em conta o efeito de resistência oferecida pelo ar para o movimento dos projéteis.

A força devida à resistência do ar será aqui assumida da forma

$$\vec{F} = -b\vec{V}\ .$$

Portanto se acrescentarmos esse termo à equação de Newton teremos as equações

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - b\frac{dy}{dt}\ .$$

As soluções dessas equações são agora para o movimento horizontal

$$v_x\left(t\right) = v_{x0}e^{-\frac{bt}{m}}$$

$$x\left(t\right) = x_0 - \frac{mv_{x0}}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right)$$

enquanto que para o movimento vertical teremos

$$v_y(t)=\left(v_{y0}+\frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{bt}{m}}-\frac{mg}{b}$$

$$y(t)=y_0+\left(\frac{m^2g}{b^2}\frac{mv_{0y}}{b}\right)\left(1-e^{-\frac{bt}{m}}\right)-\frac{mg}{b}t$$

Note-se que de segue que

$$In\left(1-\frac{b}{mv_{0x}}(x-x_0)\right)=-\frac{bt}{m}.$$

e, portanto, substituindo-se e encontramos a equação da trajetória

$$v_{01}$$

3: Movimento de uma partícula num campo magnético uniforme

Consideremos uma partícula incidindo numa região na qual existe um campo magnético uniforme e com velocidade $\vec{v}_0$.

$$\vec{B}=B_0\vec{K}$$

de acordo com a lei de Newton

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=q\vec{V}\times\vec{B}.$$

Em componentes, temos

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{qB_0}{m}v_y$$

$$\frac{dv_y}{dt}=\frac{qB_0}{m}v_x$$

$$\frac{dv_z}{dt}=0\Rightarrow(\text{constante})$$

Se derivarmos e mais uma vez obteremos

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \left(\frac{qB_0}{m}\right)\frac{dv_y}{dt}$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = \left(\frac{qB_0}{m}\right)\frac{dv_x}{dt}$$

Utilizando de novo encontraremos

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega_B^2 v_x \Rightarrow v_x = A\cos\left(\omega_B t + \delta\right)$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\omega_B^2 v_y \Rightarrow v_y = B\cos\left(\omega_B t + \delta\right)$$

onde

$$\omega_B = \frac{qB_0}{m}.$$

Note-se que tendo em vista as relações e devemos ter

$$A = B \qquad \delta = -\frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$v_y = Asen\left(\omega_B t + \delta\right)$$

$$v_x = A\cos\left(\omega_B t + \delta\right)$$

.

Uma propriedade geral de movimento num campo magnético é que a energia cinética se conserva. Portanto

$$v_x^2 + v_y^2 = v_{0\perp}^2$$

onde $v_{0\perp}$ é o módulo da velocidade no plano xy. Assim

$$A = v_{0\perp}$$

solução é, portanto

$$v_x = v_{0\perp} sen\left(\omega_B t + \delta\right)$$

$$v_y = v_{0\perp}\cos\left(\omega_B t + \delta\right)$$

$$v_z = v_{0z}.$$

A solução para a posição será

$$x(t) = x_0 - \frac{v_{0\perp}}{\omega_B}\cos(\omega_B t + \delta)$$

$$y(t) = y_0 - \frac{v_{0\perp}}{\omega_B} sen(\omega_B t + \delta)$$

$$z(t) = z_0 + v_{0||} t$$

A trajetória será uma hélice.

Note-se que, vista do plano $x - y$ a trajetória é um círculo centrado em e pois

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{v_{0\perp}^2}{\omega_B^2}.$$

O raio do círculo será

$$R = \frac{v_{0\perp}}{\omega_B} = \frac{mv_{0\perp}}{|qB_0|}.$$

O raio, portanto, será diretamente proporcional à massa da partícula.

4: Deflexão através dos campos magnéticos

Podemos fazer a deflexão de um feixe de elétrons (ou partículas, em geral) fazendo o feixe incidir numa região onde exista um campo magnético $\vec{B}$ uniforme. Se o feixe incidir perpendicularmente ao campo magnético com velocidade então sua trajetória, antes linear, será uma trajetória circular onde o raio da circunferência será

$$R = \frac{CMv}{qB_0}.$$

Este fato tem diversas aplicações. Aqui analisaremos duas delas.

Espectrógrafo de massa

Admitindo que no feixe tenhamos partículas de mesma velocidade e mesmas cargas mas diferentes massas (isótopos de um elemento químico, por exemplo) podemos construir um dispositivo que separe as massas. Isso é relativamente simples. Pela expressão acima vê-se que as partículas com massas diferentes terão raios diferentes, isto é

$$R_1 = m_1 \frac{cv}{qB_0}$$

$$R_2 = m_2 \frac{cv}{qB_0}$$

Portanto, elas atingirão distâncias diferentes depois de meia volta. Elas distarão entre si por

$$D = 2R_2 - 2R_1 = (m_2 - m_1)\frac{2cv}{qB_0}$$

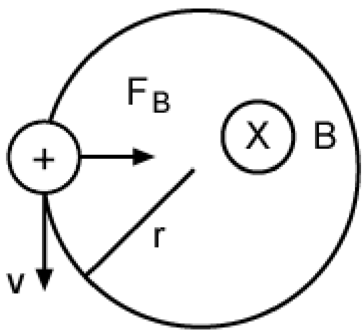
5: Seletor de Velocidades

É possível utilizar uma combinação de campos elétricos e magnéticos de tal forı que esse arranjo funcione como um seletor (ou filtro) de velocidades. Ou se partículas com certa velocidade, e apenas essas, passam pelo filt

Para se construir um filtro de velocidade basta que na direção na qual o feixe partículas incide exista campos elétricos e magnéticos uniformes e constantes perpendiculares entre si.

Com esse arranjo podemos perceber que algumas partículas tem seu movimento pelos campos. Ou seja, partículas com velocidade $\vec{V}$ tais que

$$q\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right) = 0$$



Como $\vec{V}, \vec{E}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares entre si, então a força será nula se

$$qE = qvB$$

ou seja, se a velocidade for tal que

$$v = \frac{E}{B}$$

Partículas com essa velocidade passam como se nada estivesse acontecendo. As demais são desviadas e podem ser capturadas pelo arranjo experimental.

Autor: Gil da Costa Marques

6: Exercício Proposto

1. Do alto de um morro, um menino atira uma pedra de uma altura de 30m, com um ângulo de 45^{o} com a horizontal, a uma velocidade de $10m/s$ na direção de lançamento. Determine o alcance horizontal da pedra.