Autor: Gil da Costa Marques

1: Introdução

Formalmente o problema do movimento em uma dimensão pode ser colocado como a busca da solução da equação de Newton em uma só dimensão para forças que dependem da posição x, da velocidade v (forças que a partícula experimenta ao se mover num meio viscoso, por exemplo) e explicitamento do tempo. A lei de Newton se escreve no caso geral

$$f\left(x,v,t\right)=m\frac{dv\left(t\right)}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}\,.$$

Buscar uma solução da equação de Newton significa buscar uma solução para $x\left(t\right)$ que satisfaça a equação acima e as condições iniciais

$$x\left(t_0\right)=x_0 \quad \text{e} \quad v\left(t_0\right)=v_0$$

2: Força dependente apenas do tempo

Se a força só depender do tempo, $F=F\left(t\right)$, a resolução é bastante simples, pois a equação

$$f\left(x,v,t\right)=m\frac{dv\left(t\right)}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

agora se escreve

$$m\frac{dv}{dt}=F\left(t\right)$$

ou, analogamente,

$$dv=\frac{1}{m}F\left(t\right)dt$$

e integrando-se ambos os termos obtemos

$$v\left(t\right)-v_0=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}F\left(t'\right)dt'.$$

Autor: Gil da Costa Marques

Lembrando a definição de velocidade a equação acima se escreve

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + h(t),$$

onde agora

$$h(t) = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t')dt'.$$

Observe-se que a equação assume a forma

$$dx = v_0 dt + h(t)dt$$

integrando agora o lado esquerdo e o lado direito, obtém-se a solução

$$x(t) - x_0 = v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} F(t'')dt''.$$

Substituindo-se $h(t)$ dado em $h(t) = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t')dt'$ obtemos a solução bastante geral para forças dependentes apenas do tempo

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} dt''\int_{t_0}^{t''} dt' F(t') .$$

3: Exemplos

Força constante - movimento uniformemente variado

Ao longo do curso colegial o aluno se depara com vários exemplos nos quais a força que age sobre um corpo é constante. Nesse caso o movimento se dará ao longo dessa força (supondo que a velocidade inicial esteja na direção da força). Admitindo que essa direção seja o eixo x e chamando de F a componente da força teremos, para a aceleração (constante),

$$a = \frac{F}{m} = \text{constante} .$$

O caso de uma força constante é um caso particular de força que depende apenas do tempo. Substituindo $F = \text{constante}$ em $v(t) - v_0 = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t')dt'$ e $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt'' \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt' F(t')$, teremos

$$v(t)=v_0+\frac{F}{m}(t-t_0)=v_0+a(t-t_0)$$

$$x(t)=x_0+v_0(t-t_0)+\frac{F}{2m}(t-t_0)^2=$$

$$=x_0+v_0(t-t_0)+\frac{a}{2}(t-t_0)^2$$

que são as equações do movimento retilíneo uniformemente variado.

Um caso especial é o do movimento vertical sob a ação da gravidade. Nesse caso teremos

$$a=\frac{F}{m}=g=9{,}8m/s^2,$$

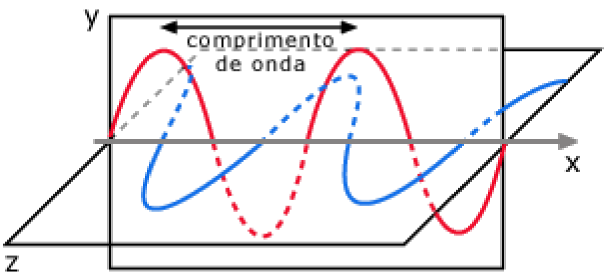
$$v=v_0+g(t-t_0)$$

$$x=x_0+v_0+\frac{g}{2}(t-t_0)^2$$

.

Força oscilante

Outro exemplo simples é aquele de uma partícula de massa m e carga q que está sujeita a um campo elétrico oscilante, por exemplo, um elétron sujeito ao campo elétrico de uma onda eletromagnética. Tomando o eixo x na direção do campo elétrico, temos:



$$F(t)=qE(t)=qE_0\cos(\omega t),$$

onde E_0 dá uma medida da intensidade da onda eletromagnética e ω é sua frequência angular.

De $v(t)-v_0=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}F(t')dt'$ vê-se que a velocidade da partícula como função do tempo será dada pela expressão

$$v(t)=v_0+\frac{q}{m\omega}E_0 sen(\omega(t-t_0)),$$

Se tomarmos $t_0 = 0$, a posição da partícula como função do tempo será, de $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt''\int_{t_0}^{t''} dt' F(t')$,

$$x(t) = x_0 + \frac{q}{m\omega^2}E_0 + v_0 t - \frac{q}{m\omega^2}E_0\cos(\omega t).$$

Consideremos o caso do movimento unidimensional no qual a força depende apenas da velocidade,

$$F = F(v).$$

Nesse caso a equação de Newton se escreve

$$m\frac{dv}{dt} = F(v)$$

ou, analogamente,

$$\frac{dv}{F(v)} = \frac{dt}{m}.$$

Integrando essa expressão obtemos

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv'}{F(v')} = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt' = \frac{t - t_0}{m}.$$

A integral do primeiro membro é dada por $\phi(v) - \phi(v_0)$, onde ϕ é uma primitiva (antiderivada) de $\frac{1}{F}$. Temos então:

$$\phi(v) - \phi(v_0) = \frac{t - t_0}{m}.$$

Para determinarmos v basta encontrarmos a função inversa de ϕ

$$v = \phi^{-1}\left(\phi(v_0) + \frac{t - t_0}{m}\right).$$

A partir dessa expressão podemos obter, pelo menos implicitamente a velocidade $v = v(t)$. A posição será determinada pela expressão:

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t') = dt'.$$

Autor: Gil da Costa Marques

Um exemplo simples é aquele no qual a força depende linearmente da velocidade. No caso de um barco em movimento num lago, a força de resistência ao movimento do barco, devido à água, pode ser aproximada por uma expressão. Escrevemos pois

$$F = -bv .$$

onde b é uma constante positiva.

Observe-se que o sinal (-) vem do fato de que essa força é sempre contrária ao movimento. De $\int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{F(v')} = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt' = \frac{t-t_0}{m}$ segue

$$-\frac{1}{b}\int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{v'} = \frac{t-t_0}{m} .$$

Nesse caso

$$\phi(v) = -\frac{1}{b} Inv .$$

portanto de $\phi(v) - \phi(v_0) = \frac{t-t_0}{m}$ segue que

$$Inv - Inv_0 = In\frac{v}{v_0} = -\frac{b}{m}(t-t_0)$$

e invertendo o logaritmo vem

$$v = v_0 e^{-\frac{b}{m}}(t-t_0) .$$

A solução para a posição é obtida integrando-se a equação acima, isto é:

$$x = x_0 + \frac{mv_0}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}\right).$$

Autor: Gil da Costa Marques

5: Forças dependentes apenas da posição

Nesse caso procuramos uma solução da equação

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(x\right).$$

Nem sempre é possível encontrar soluções explícitas para essa equação diferencial de segunda ordem. A solução é possível, no entanto, para alguns casos simples. A determinação de $x\left(t\right)$ fica simplificada, em geral, ao analisarmos a **conservação de energia**. Isso será feito posteriormente.

6: O oscilador harmônico simples

O movimento harmônico simples é definido como aquele no qual a força que atua sobre a partícula tem a forma

$$F\left(x\right)=-kx\,.$$

A lei de Newton $f\left(x,v,t\right)=m\frac{dv\left(t\right)}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}$ então se escreve, nesse caso

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx\,.$$

ou seja, a força é proporcional ao deslocamento, mas na direção contrária do mesmo.

Um exemplo simples desse tipo de força ocorre no caso em que procuramos deformar uma **substância elástica**. Enquanto a deformação não for muito grande a força é proporcional ao deslocamento (ou à deformação imposta), mas atua sempre no sentido contrário ao dele. É uma tendência ou reação natural, no sentido de buscar a restauração da forma original. Por isso k é sempre referido como a constante elástica.

Podemos encontrar uma solução da equação acima pelo método da tentativa e erro. Sabemos que a função $\cos t$ é tal que

Autor: Gil da Costa Marques

$$\frac{d}{dt}\cos t = -sent$$

$$\frac{d^2\cos t}{dt^2} = -\cos t$$

Portanto a expressão acima nos sugere buscar uma solução para $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ da forma

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)\ .$$

Substituindo em $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ constataremos que, de fato $x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$ é uma solução se

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ .$$

A solução encontrada demonstra que o valor máximo do deslocamento (x_m) é

$x_m = A$.

A é, portanto a amplitude do movimento. A constante θ_0 é uma fase, por enquanto, arbitrária.

Note-se que o movimento nesse caso é periódico. O período é determinado a partir da condição:

$$x(t-T) = x(t).$$

De $x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$ segue que

$$\omega T = 2\pi$$

Portanto, o período do movimento harmônico simples é $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

A frequência, sendo o inverso do período será dada por

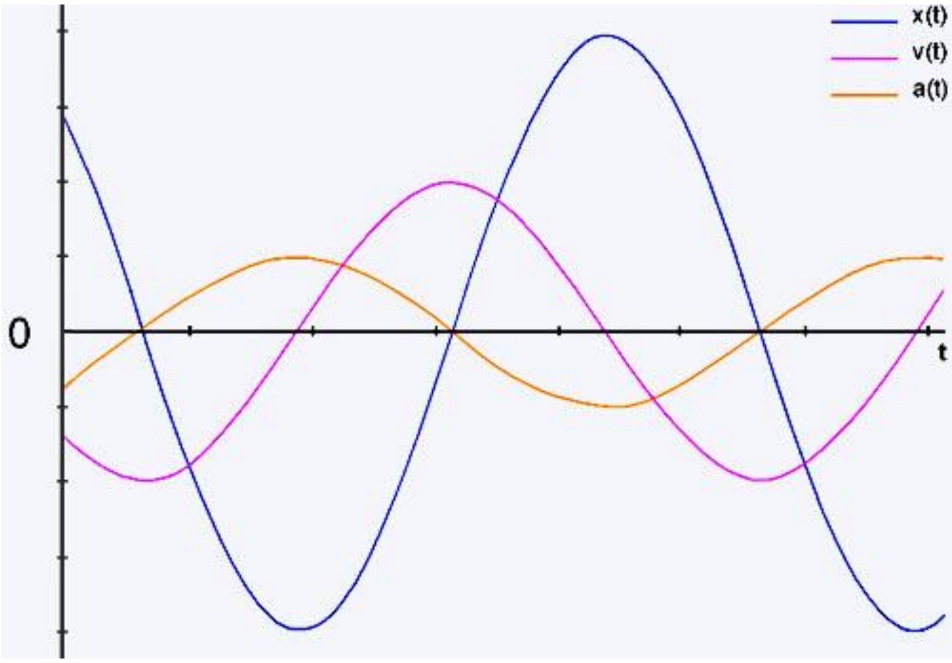
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{1}{2\pi}.$$

As constantes A e θ_0 podem ser determinadas a partir das condições iniciais. Isto é, a partir da posição e da velocidade iniciais

$$x(0) = x_0 \text{ e } v(0) = v_0$$

Notemos primeiramente que a velocidade da partícula no **movimento harmônico simples** será dada por

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega sen(\omega t + \theta_0) \ .$$



Portanto, a velocidade máxima (ou mínima) da partícula será dada pelo produto da amplitude pela frequência angular:

$$v_m = \pm A\,\omega \, .$$

A velocidade máxima (ou mínima) ocorre nos pontos onde x = 0.

A aceleração será, de $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega sen(\omega t + \theta_0)$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0) \, .$$

Como esperado, obtemos de $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0)$ e $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ que

$$a(t) = -\frac{k}{m} x \, .$$

Estamos agora em condições de determinar a amplitude e a fase em função de v_0 e x_0. De $x(t)=A\cos(\omega t+\theta_0)$ segue que

$$x_0 = A\cos\theta_0 .$$

De $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=-A\omega sen(\omega t+\theta_0)$ segue que

$$v_0 = -A\omega sen\theta_0 .$$

Portanto, a amplitude pode ser determinada, por exemplo, a partir das condições iniciais. De $x_0 = A\cos\theta_0$ e $v_0 = -A\omega sen\theta_0$ segue que

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}} .$$

e

$$\theta_0 = \arctan\left(-\frac{v_0}{x_0\omega}\right).$$

7: O oscilador harmônico amortecido

Outro problema de interesse em física é aquele no qual uma partícula capaz de executar um movimento harmônico simples fica inserida num meio viscoso. Nesse meio surge uma força que tende a amortecer as oscilações. Imaginando uma força no meio proporcional à velocidade, escrevemos

$$f_a = -bv = -b\frac{dx}{dt} .$$

Nessas circunstâncias a equação do oscilador amortecido é:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0 .$$

A técnica para resolver equações diferenciais lineares como a equação anterior é procurar uma solução de forma

$$X(t)=Ae^{i\omega t} .$$

Claramente uma tal solução é uma função a valores complexos. As soluções fisicamente aceitáveis são a parte real ou imaginária de $X(t)$. Isto é

$$x(t)=\operatorname{Re}X(t).$$

ou

$$x(t) = \operatorname{Im} X(t).$$

Na realidade, tomamos uma superposição das duas.

Substituindo-se $X(t) = Ae^{i\omega t}$ em $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + b\dfrac{dx}{dt} + kx = 0$ encontramos

$m\left(-\omega^2\right) + bi\omega + k = 0$,

cujas soluções são

$$\omega\pm = \frac{ib \pm \sqrt{-b^2 + 4mk}}{2m}.$$

Temos assim, três casos distintos, em função dos valores relativos de b^2 e 4mk:

a) $b^2 > 4\text{mk}$ (oscilador superamortecido). A solução mais geral será

$$x(t) = Ae^{-\frac{bt}{2m}\left(1+\sqrt{1-\frac{4mk}{b^2}}\right)} + Be^{-\frac{bt}{2m}\left(1-\sqrt{1-\frac{4mk}{b^2}}\right)}.$$

b) $b^2 = 4mk$ (oscilador criticamente amortecido). A solução será da forma

$$x(t) = \left(A' + B't\right)e^{-\frac{bt}{2m}}.$$

c) $b^2 < 4mk$ (oscilador sub-amortecido). A solução geral será da forma

$$x(t) = Ce^{-\frac{bt}{2m}}\cos\omega' t + De^{-\frac{bt}{2m}}\operatorname{sen}\omega' t.$$

onde

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}.$$

8: O oscilador harmônico forçado

Consideremos um oscilador harmônico simples sujeito a uma força externa periódica da forma

$$F_{ext}(t) = F_0\cos\left(\omega_e t + \delta\right).$$

A equação do oscilador agora é

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0.$$

A solução geral da equação não homogênea anterior é dada pela solução geral da equação homogênea associada

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kxX=0$$

mais uma solução particular de $m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0$, isto é,

$$x(t)=x_h(t)+x_p(t).$$

A solução $x_h(t)$ foi determinada no item anterior. Para determinar $x_p(t)$, consideramos a equação auxiliar complexa

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F_0e^{i(\omega_e t+\delta)}$$

Se $x_p(t)$ é uma solução particular dessa equação, então

$$X_p(t)=X_p^0e^{i(\omega_e t+\delta)}$$

é uma solução particular de $m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0$. Procuramos uma solução particular de $m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F_0e^{i(\omega_e t+\delta)}$ na forma

$$X_p^0\left(-m\omega_e^2+ib\omega_e+k\right)=F_0,$$

onde X_0 é uma constante a determinar. Substituindo em $m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F_0e^{i(\omega_e t+\delta)}$ obtemos

$$X_0\left(-m\omega_e^2+ib\omega_e+k\right)=F_0,$$

e, portanto,

$$X_0=\frac{F_0}{\left(-m\omega_e^2+ib\omega_e+k\right)}.$$