Autor: Gil da Costa Marques

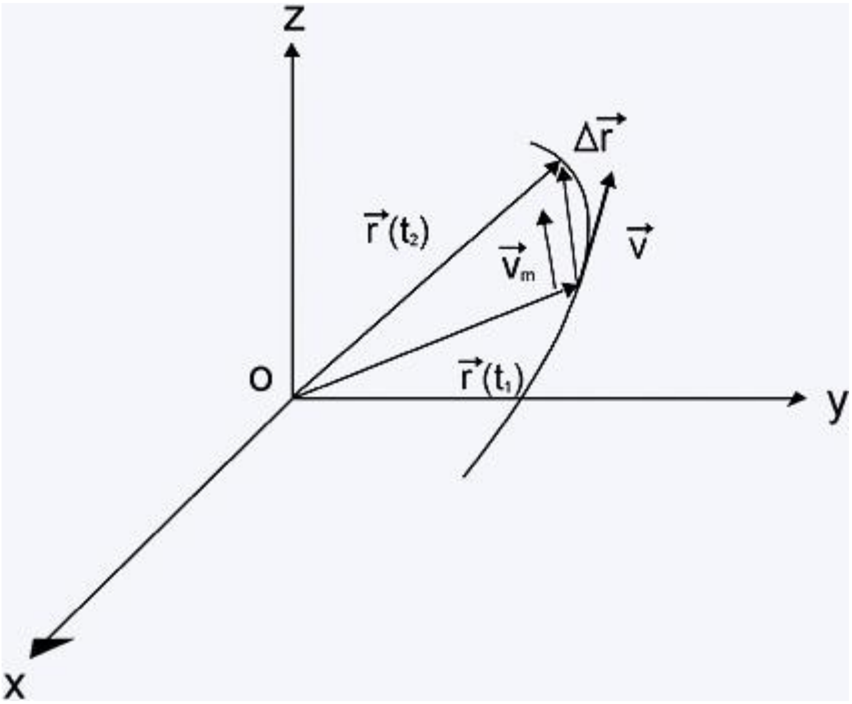
1: Vetor deslocamento

Já vimos que a posição de uma partícula é uma grandeza vetorial. Assim, a posição será representada pelo vetor $\vec{r}$. Se a partícula estiver em movimento, o vetor posição dependerá do instante de tempo t. Escrevemos

$$\vec{r} = \vec{r}\left(t\right)$$

ou, em coordenadas cartesianas,

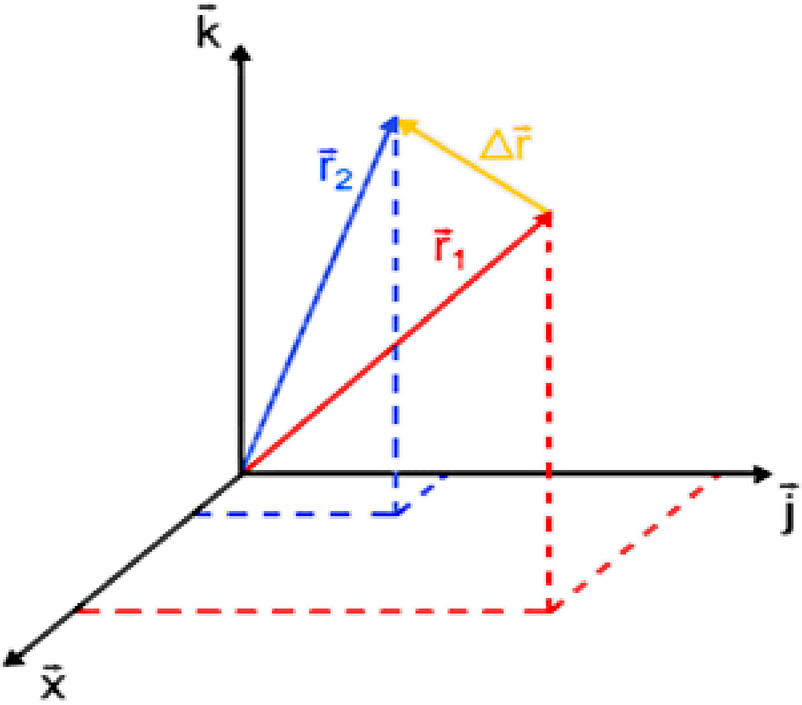
$$\vec{r} = x\left(t\right)\vec{i} + y\left(t\right)\vec{j} + z\left(t\right)\vec{k}$$



Consideremos dois instantes t_1 e t_2. Nesses instantes, o vetor posição tem os valores dados por $\vec{r}\left(t_1\right)$ e $\vec{r}\left(t_2\right)$. Definimos o vetor deslocamento $\left(\Delta\vec{r}\right)$ entre os instantes t_1 e t_2 como sendo o vetor

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\left(t_2\right) \text{ e } \vec{r}\left(t_1\right) = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{i} + \Delta z\vec{k}$$

Autor: Gil da Costa Marques



2: Vetor velocidade

Já dissemos que a velocidade é uma grandeza vetorial. Ela pode ser obtida a partir do vetor posição de uma maneira análoga ao descrito anteriormente para o caso unidimensional.

O vetor **velocidade média** nada mais é do que a relação

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k} \quad ,$$

onde $\Delta\vec{r}$ é o vetor deslocamento entre os instantes de tempo t_2 e t_1 e $\Delta t = t_2 - t_1$ é o intervalo de tempo decorrido.

A **velocidade instantânea** é dada por

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$

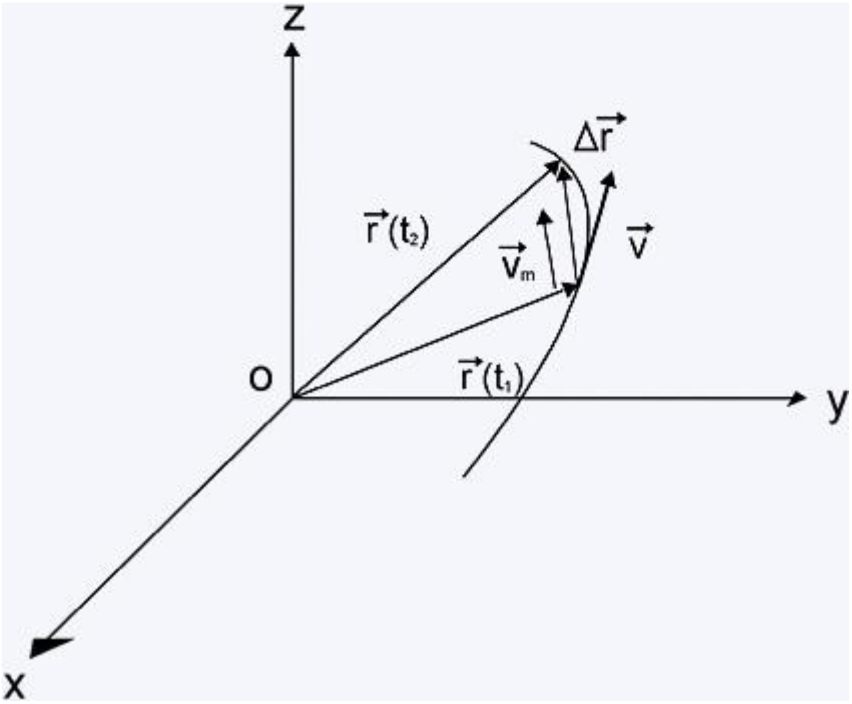
ou, em termos da linguagem de derivada,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

As componentes x, y e z do vetor velocidade são dadas então por

Autor: Gil da Costa Marques

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y \frac{dy}{dt}, \quad v_z \frac{dz}{dt}$$



Da definição

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k},$$

vemos que a velocidade $\vec{v}$ é tangente à trajetória.

3: Vetor aceleração

Tomamos agora as velocidades $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ nos instantes t_1 e t_2 e definimos a **aceleração média** pela relação

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Finalmente, a **aceleração instantânea** é definida pelo processo limite

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Autor: Gil da Costa Marques

ou seja, a aceleração é dada por

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}\,.$$

Vemos que as componentes do vetor aceleração são dadas por

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad \mathrm{a}_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \mathrm{a}_z = \frac{dv_z}{dt}$$

,

aceleração é também a derivada segunda do vetor de posição:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2v_y}{dt^2}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt^2}\vec{k}$$

ou, em termos de componentes,

$$a_x \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \mathrm{a}_y = \frac{d^2v_y}{dt^2}, \quad \mathrm{a}_z = \frac{dv_z}{dt^2}$$

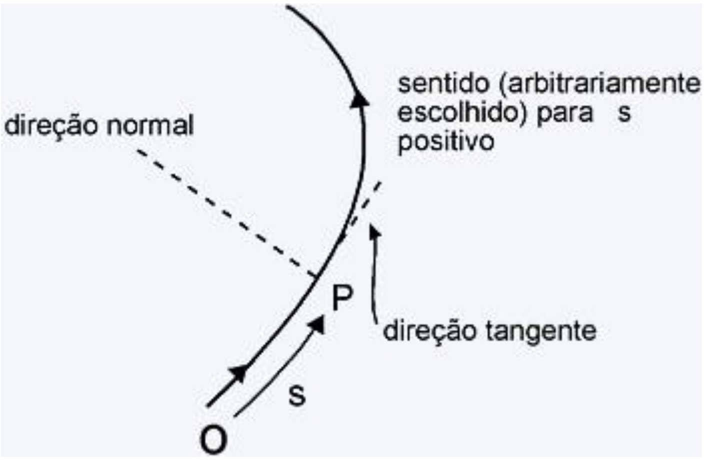
,

4: Movimento ao longo de uma curva

Nesta seção estudaremos, utilizando vetores, o movimento de uma partícula quando esta se move sobre uma curva específica: um carrinho transportando pessoas numa montanha russa, por exemplo.

Como a velocidade e a aceleração são grandezas vetoriais, procuraremos especificá-las em cada ponto P da trajetória.

Autor: Gil da Costa Marques



Procuraremos definir as componentes tangente e normal da velocidade e da aceleração em cada ponto. Num ponto arbitrário podemos introduzir uma direção tangente e uma direção normal à curva nesse ponto.

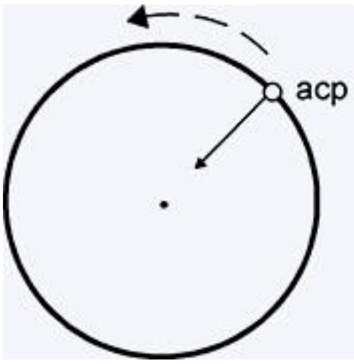
Assim, podemos definir a componente tangente da velocidade e da aceleração como sendo a projeção da velocidade e da aceleração na direção tangente à curva. Essas componentes são exatamente o que denominamos antes de velocidade e aceleração escalar:

$$v_t = v = \frac{ds}{dt} \quad ,$$

$$a_t = \gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad .$$

$$v_t = v = \frac{ds}{dt} \quad ,$$

$$a_t = \gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad .$$



Como o **vetor velocidade é sempre tangente à trajetória**, a componente da velocidade na direção normal é nula, isto é,

$$v_n = 0 .$$

No entanto, a aceleração tem uma componente normal apontando para dentro da curva, dada por

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

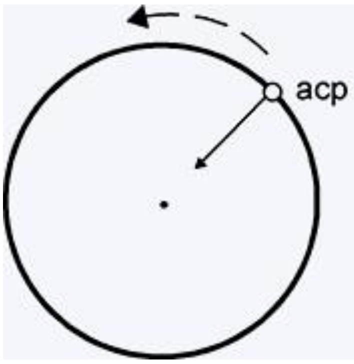
onde ρ é o raio de curvatura no ponto P.

Para especificarmos o raio de curvatura, introduzimos uma circunferência tangente à curva pelo ponto *P* (circunferência osculadora). A maneira de construí-la é a seguinte:

Consideremos, além do ponto P, mais dois outros pontos P_1 e P_2 ao longo da curva. Por esses três pontos (isso vale para quaisquer três pontos não alinhados) podemos fazer passar uma circunferência. Ao tomarmos P_1 e P_2 cada vez mais próximos de P, definimos a circunferência osculadora, passando por P. Essa circunferência tem um raio ρ.

5: Aceleração centrípeta

Na última seção vimos que, num ponto P, a aceleração tem duas componentes. A componente normal é conhecida como **aceleração centrípeta**.



Componente tangencial: aceleração escalar

$$a_t = \gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Componente normal: aceleração centrípeta

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

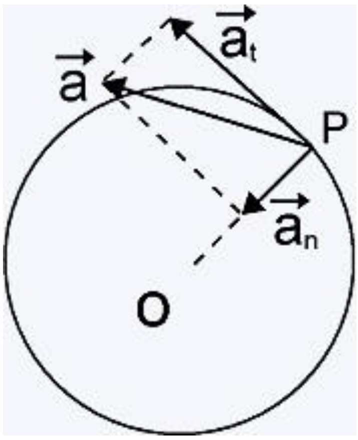
O nome centrípeta (que pede o centro) significa que ela aponta sempre para o centro da circunferência osculadora. Ela é responsável pela variação da direção da velocidade vetorial e existe mesmo no movimento uniforme, se ele não for retilíneo. Isso é o que procuraremos explicar no movimento circular uniforme.

6: Aceleração centrípeta no movimento circular

No movimento circular, a circunferência osculadora coincide com o círculo no qual o movimento se dá. Portanto,

$$\rho = r \ ,$$

onde r é o raio do círculo.



A velocidade escalar v é dada por

$$v = r\omega$$

onde ω é a velocidade angular. A aceleração tangencial é dada por

$$a_t = r\alpha \ ,$$

onde $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$ é a aceleração angular, ao passo que a aceleração centrípeta tem o valor:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$ $$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \ .$$

7: A velocidade em coordenadas generalizadas

O vetor posição em coordenadas generalizadas é dado por

$$\vec{r} = x(q_1, q_2, q_3)\vec{i} + y(q_1, q_2, q_3)\vec{j} + z(q_1, q_2, q_3)\vec{k} \ .$$

Portanto, o vetor velocidade será dado por

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\vec{k} \right)\dot{q}_1 +$$
$$+\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_2}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_2}\vec{k} \right)\dot{q}_2 +$$
$$+\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_3}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_3}\vec{k} \right)\dot{q}_3$$

onde $\dot{q}_1 \left(I = 1,2,3 \right)$ é a derivada de q_1 com respeito ao tempo.

Podemos escrever então

$$\vec{v} = \vec{b}_1.\dot{q}_1 + \vec{b}_2.\dot{q}_2 + \vec{b}_3.\dot{q}_3 \,.$$

Note-se que $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ e $\dot{q}_3$ são portanto componentes de $\vec{v}$. Elas são dadas por

$$\dot{q}_1 = \vec{v}.\vec{b}_1$$
$$\dot{q}_2 = \vec{v}.\vec{b}_2$$
$$\dot{q}_3 = \vec{v}.\vec{b}_3$$

onde $\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \right)$ é a base recíproca de $\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \right)$

8: A aceleração em coordenadas generalizadas

A partir das equações anteriores vemos que

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dot{\vec{b}}_1\dot{q}_1 + \dot{\vec{b}}_2\dot{q}_2 + \dot{\vec{b}}_3\dot{q}_3 + \dot{\vec{b}}_1\ddot{q}_1 + \dot{\vec{b}}_2\ddot{q}_2 + \dot{\vec{b}}_3\ddot{q}_3$$

As derivada $\dot{\vec{b}}_1$ são dadas por

$$\dot{\vec{b}}_1 = \frac{d\vec{b}_1}{dt} = \frac{\partial \vec{b}_1}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{b}_1}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{b}_1}{\partial q_3}\dot{q}_3 \quad \left(I = 1,2,3 \right) \,.$$

Substituindo a equação acima pela

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dot{\vec{b}}_1\dot{q}_1 + \dot{\vec{b}}_2\dot{q}_2 + \dot{\vec{b}}_3\dot{q}_3 + \dot{\vec{b}}_1\ddot{q}_1 + \dot{\vec{b}}_2\ddot{q}_2 + \dot{\vec{b}}_3\ddot{q}_3$$

e exprimindo os $\frac{\partial \vec{b}_1}{\partial q_m}$ em termos de $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ e $\vec{b}_3$, obteremos a expressão de $\vec{a}$ em coordenadas generalizadas.

9: O vetor velocidade em coordenadas cilíndricas

Utilizando-se as coordenadas cilíndricas ρ, φ e z e seguindo o procedimento delineado no item 7, obtém-se

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$$

onde $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ e $\vec{e}_z$ são vetores unitários mostrados na figura abaixo.