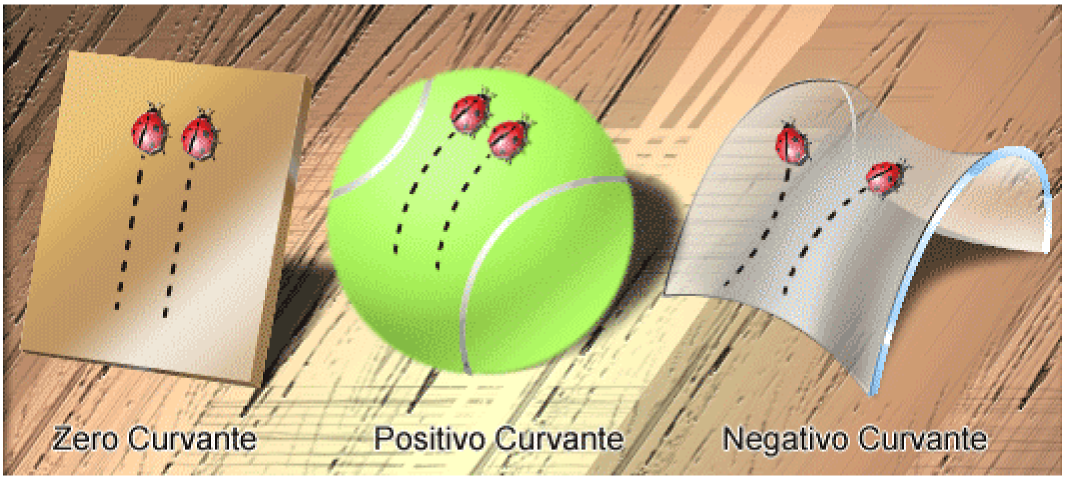
Autor: Gil da Costa Marques

1: Distância

Nesse capítulo vamos abordar uma questão a respeito do espaço físico que passou a ser relevante depois de trabalhos pioneiros de Einstein ao propor a **teoria geral da relatividade**. Nessa teoria a matéria teria o efeito de curvar o espaço físico. Para entendermos o que é um espaço curvo devemos começar definindo o conceito de distâncias. Só podemos entender alguns conceitos de geometria do espaço depois dessa definição. Ou seja, a geometria do espaço tem como fundamento básico o conceito de distância entre dois pontos.



Dado um espaço euclidiano x, podemos definir uma função real **d** - conhecida como distância - tal que, para os pontos a, b, c,x, valem as propriedades:

$1) d(a,b) \geq 0$ e $d(a,a) = 0$,

$2) d(a,b) = d(b,a)$ (simetria),

$3) d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ desigualdade triangular,

$4) d(a,b) > 0$ $se\ a \neq b$.

Um espaço é dito euclidiano se a distância entre dois pontos de coordenadas

$a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$

é dada por

$$d(a,b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Autor: Gil da Costa Marques

2: O tensor métrico e a curvatura do espaço

Imaginemos dois pontos no espaço tridimensional tal que suas coordenadas (aqui utilizamos coordenadas generalizadas) sejam

$$P_1 \leftrightarrow (q_1, q_2, q_3)$$

$$P_2 \leftrightarrow (q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, q_3 + dq_3)$$

onde dq_1, dq_2, dq_3 são quantidades infinitesimais. Ou seja, os pontos estão muito próximos.

Definimos a ds distância entre dois pontos muito próximos (que diferem por quantidades infinitesimais dq_i das coordenadas generalizadas) por

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{3} dq_i . dg_{ij} . dq_j$$

onde g_{ij} é o tensor métrico.

Se pudermos encontrar transformações

$$q_1 = q_1(x, y, z),$$
$$q_2 = q_2(x, y, z),$$
$$q_3 = q_3(x, y, z),$$

tais que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 ,$$

dizemos que o espaço é plano. De outra forma dizemos que o espaço é curvo.

3: Comprimento - espaço Euclidiano

Dois pontos localizados sobre um corpo formam o que definimos em Física como um "intervalo espacial". Se os pontos do espaço podem ser caracterizados por coordenadas x_1, x_2, x_3, de tal forma que as diferenças das coordenadas $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ dos dois extremos do intervalo espacial fornecem, para qualquer orientação do intervalo, o mesmo valor para a soma dos quadrados

$$\Delta s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \ ,$$

dizemos que o espaço é euclidiano e as coordenadas são cartesianas.

Chamamos a grandeza Δs de comprimento do intervalo:

$$\Delta s = comprimento$$

4: Geometria do espaço

A geometria do espaço tem como fundamento básico o conceito de distância.

Admitimos que o espaço é euclidiano, isto é, nesse espaço são válidos os teoremas da geometria euclidiana. Isto quer dizer que o comprimento de um intervalo é dado por $\Delta s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2$.

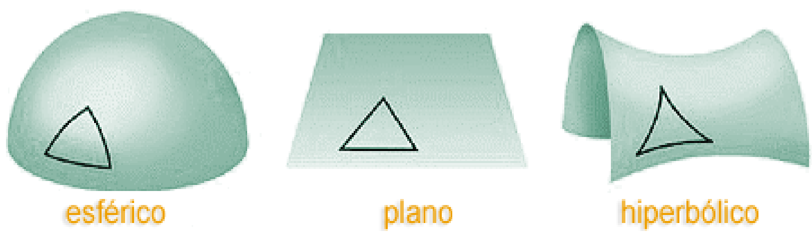
Dizer que nesse espaço valem os princípios da geometria euclidiana significa valer regras tais como:

a) A soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180°.

b) Para um triângulo retângulo vale o famoso teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

onde **a** é a hipotenusa e **b** e **c** são os demais lados do triângulo.

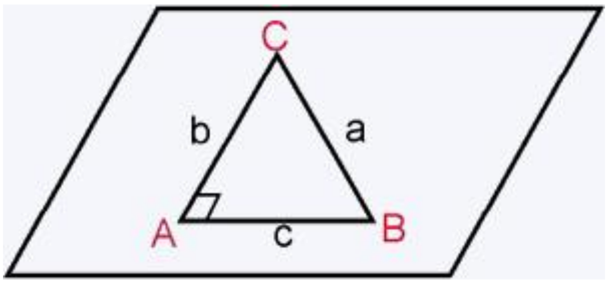


A aplicabilidade da geometria euclidiana está intimamente ligada a uma propriedade do espaço conhecida como curvatura.

Se a curvatura do espaço for nula, sua geometria é euclidiana. Se a curvatura do espaço for diferente de zero, o espaço é dito curvo. Nesse caso, a geometria será dita riemanniana.

Autor: Gil da Costa Marques

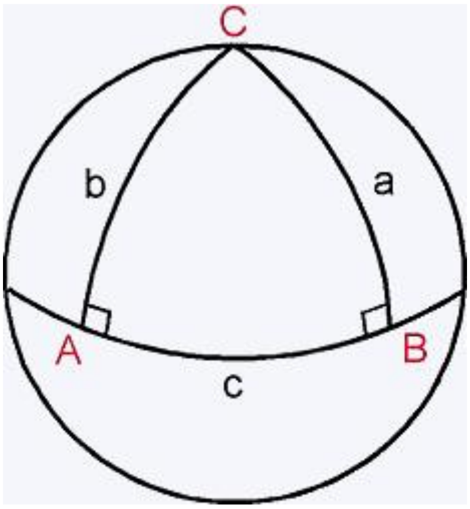
Para distinguirmos uma geometria da outra, consideremos o caso de uma superfície plana e uma superfície esférica. No caso do plano, se tomarmos um ponto A e consideramos perpendiculares por esse ponto até dois pontos B e C, verificaremos que, para as distâncias a, b e c, vale o teorema de Pitágoras



$$a^2 = b^2 + c^2$$

ou seja, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos lados adjacentes.

Consideremos agora três pontos A, B, C sobre uma superfície esférica. Seja um caso em que A e B estão sobre a linha do Equador e C está sobre o Polo Norte. O caminho mais curto que liga o ponto C sobre o Polo Norte até um ponto sobre o Equador é, como sabemos, a linha de longitude, a qual forma um ângulo reto com a linha do Equador. Temos, pois, aqui um triângulo retângulo tal que a = b.



Vemos pois que, sobre a esfera,

$$b^2 = c^2 > a^2$$

Não vale, portanto, o teorema de Pitágoras. Ademais, as somas dos ângulos é maio rque 180º.

As medidas de distância de objetos localizados no espaço nos levarão, em geral, a decidir se o espaço é curvo ou não. Nas medidas no cotidiano, e dentro das precisões das medidas existentes, verificamos que a geometria do espaço é euclidiana.

Autor: Gil da Costa Marques

Einstein observou, no entanto, que a presença de massa afeta a curvatura do espaço, isto significando que, rigorosamente, a geometria euclidiana é válida apenas como uma aproximação, aproximação essa muito boa para os fenômenos do cotidiano que ocorrem na superfície terrestre.

Em regiões onde o campo gravitacional é muito intenso (como nas proximidades de um buraco negro), a curvatura do espaço deverá se manifestar e, consequentemente, produzir efeitos físicos.

5: O espaço é curvo?

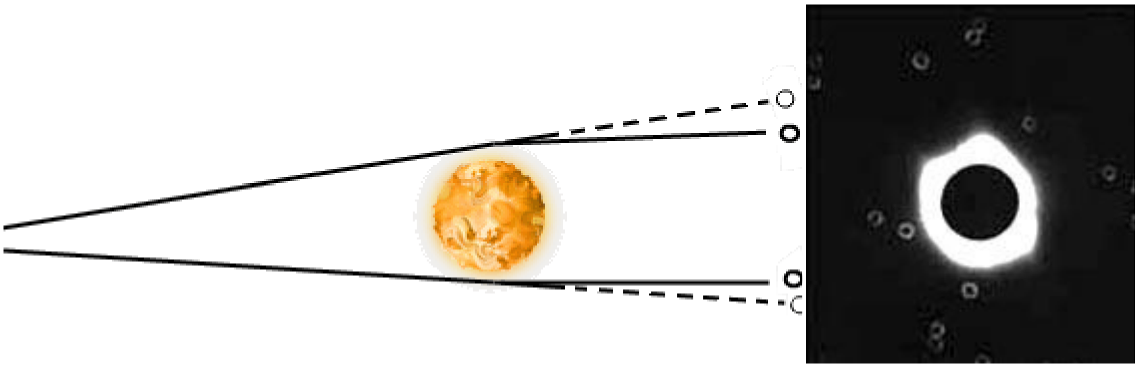
No início do século XIX já havia a preocupação com a questão da validade da geometria de Euclides para o espaço tridimensional. O grande matemático alemão Carl Friedrich Gauss sugeria que para testá-la bastaria efetuar a soma dos ângulos internos de um triângulo. Gauss também percebera que, para haver desvios significativos o triângulo deveria ser suficientemente grande.

Utilizando-se de um teodolito, Gauss efetuou medidas de ângulos entre 3 cidades na Alemanha, entre os anos de 1821 e 1823. A maior distância entre elas era de aproximadamente 100 km. Os valores para os ângulos obtidos por Gauss foram:

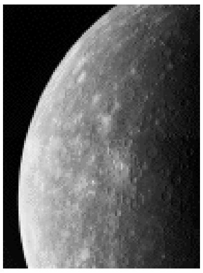
$$\begin{array}{r} 86^{\circ}13'58{,}366'' \\ 53^{\circ}6'45{,}642'' \\ 40^{\circ}39'30{,}165'' \\ \hline 180^{\circ}00'14{,}173'' \end{array}$$

A verificação da aplicabilidade dos princípios da geometria euclidiana envolve portanto, medir ângulos de triângulos muito grandes. Poderíamos, por exemplo, tomar um triângulo, onde um dos vértices esteja sobre a Terra e os outros dois se localizem em estrelas ou galáxias distantes. No entanto, não podemos colocar teodolitos nas estrelas. Resta-nos assim fazer inferências através de outros métodos.

Existem duas evidências para o enrugamento do espaço. A primeira diz respeito ao encurvamento da luz pelo Sol. Isto se pode verificar experimentalmente durante uma eclipse do Sol. Os raios luminosos provenientes de uma estrela são ligeiramente curvados na direção do Sol quando eles passam pelas bordas do Sol. Tal efeito fora previsto por Einstein em 1917.



Outro efeito da rugosidade do espaço é a precessão da órbita de **Mercúrio**. Como Mercúrio é o planeta mais próximo do Sol, a trajetória de Mercúrio não é exatamente elíptica. Na realidade, sua órbita não é uma órbita fechada. Essa precessão da órbita é um efeito da curvatura do espaço.



De qualquer forma sabemos hoje que para escalas de distâncias relativamente grandes (da ordem de 10^{25} m), a geometria de Euclides se aplica, o mesmo valendo para distâncias muito pequenas (cerca de $10^{-15}m$).

6: Homogeneidade no espaço

O espaço é homogêneo. Uma translação do ponto de observação, ou de referência, não leva a consequências físicas. As leis são as mesmas. Qualquer ponto transladado é igualmente bom para descrever os fenômenos.

Mais adiante veremos que a homogeneidade do espaço leva a uma consequência importante, que é a **conservação do momento linear total** de um sistema fechado (sistema de corpos que interagem entre si mas não interagem com outros corpos).

A homogeneidade do espaço equivale a dizer que as leis físicas são invariantes mediante translações no espaço (invariância espacial).

7: Isotropia no espaço

Não existem direções no espaço privilegiadas ou, equivalentemente, identificáveis. Qualquer direção do espaço é equivalente a outras direções. As leis físicas devem ser as mesmas. Ou seja, a Física deve ser invariante quando fazemos uma rotação espacial.

Veremos que essa invariância por rotações implica na **conservação do momento angular total** de um sistema fechado.