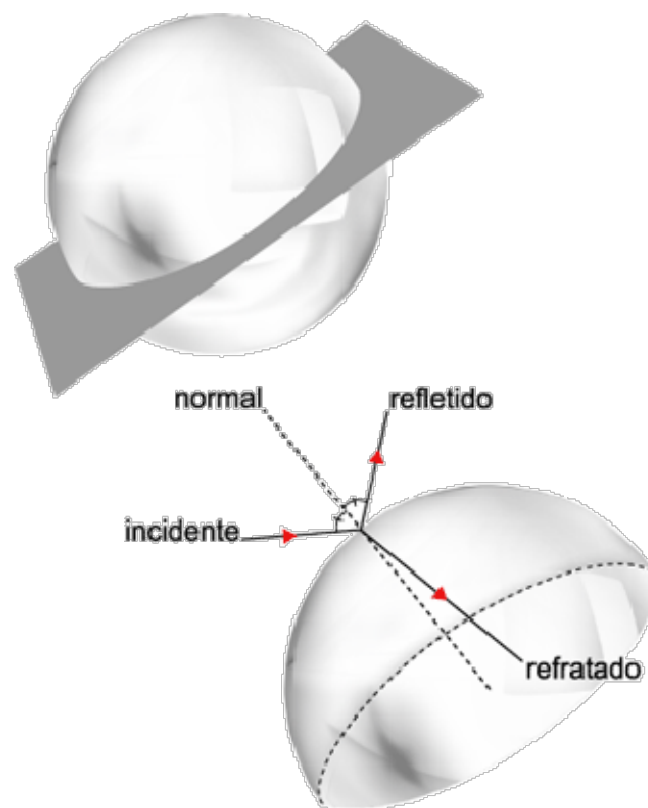


Espelhos esféricos

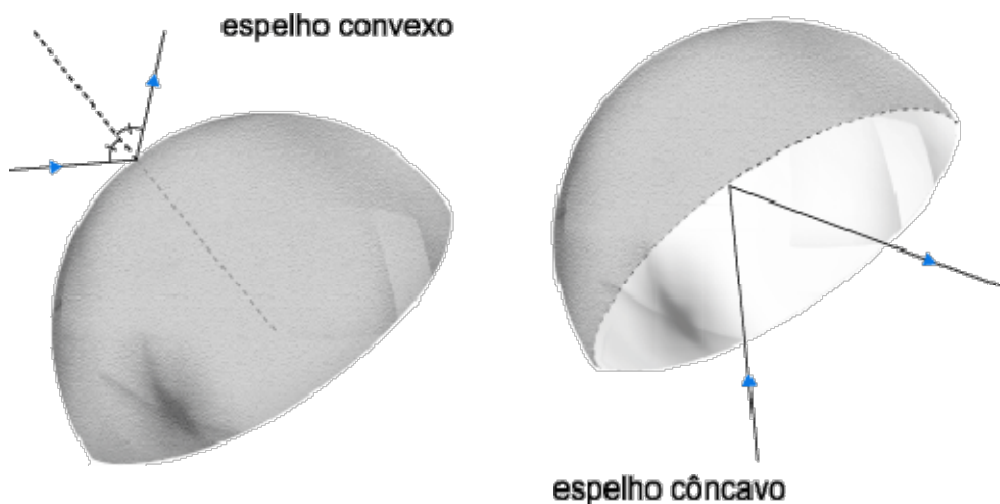
1, Introdução

Tem-se grande interesse no estudo de uma situação na qual a luz atravessa dois meios cuja superfície de separação é uma superfície esférica (ou uma parte dela - uma calota esférica). Ao passar de um meio para outro pode ocorrer tanto a reflexão quanto a refração.



No caso em que a superfície esteja polida exibindo uma reflexão regular, uma calota esférica se constitui num espelho esférico. Uma calota polida de um carro pode ser pensada como um exemplo de um tal espelho (desde que a calota seja esférica).

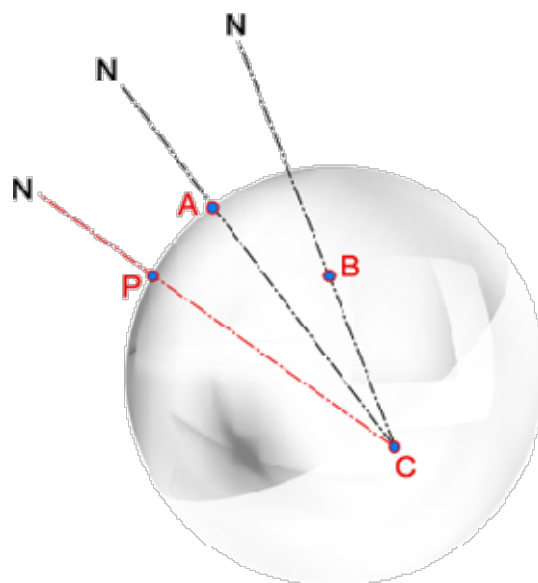
A esfera da qual a calota faz parte tem duas faces. Uma interna e outra externa. Quando a superfície refletiva for a interna, o espelho é côncavo. Quando a superfície refletora for a externa, o espelho é dito convexo.



2: Reflexão da luz em espelhos esféricos

Para os espelhos esféricos valem igualmente as já enunciadas leis da reflexão. É importante, no entanto, entender o significado geométrico dos ângulos de incidência e reflexão nesse caso. Em primeiro lugar, os ângulos de reflexão e de incidência são medidos a partir da normal à superfície (a regra é geral). Assim, a primeira providência ao determinarmos a direção do raio refletido num ponto qualquer sobre o espelho é traçarmos a normal à superfície passando por esse ponto.

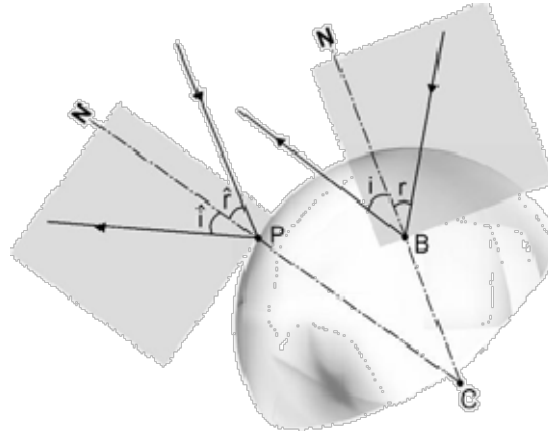
Como a superfície é esférica, a normal é uma reta passando pelo ponto P e pelo centro da esfera (C) da qual a calota se originou. A regra vale para qualquer ponto sobre a esfera. A figura a seguir mostra a normal N para três situações distintas (pontos A, B e P).



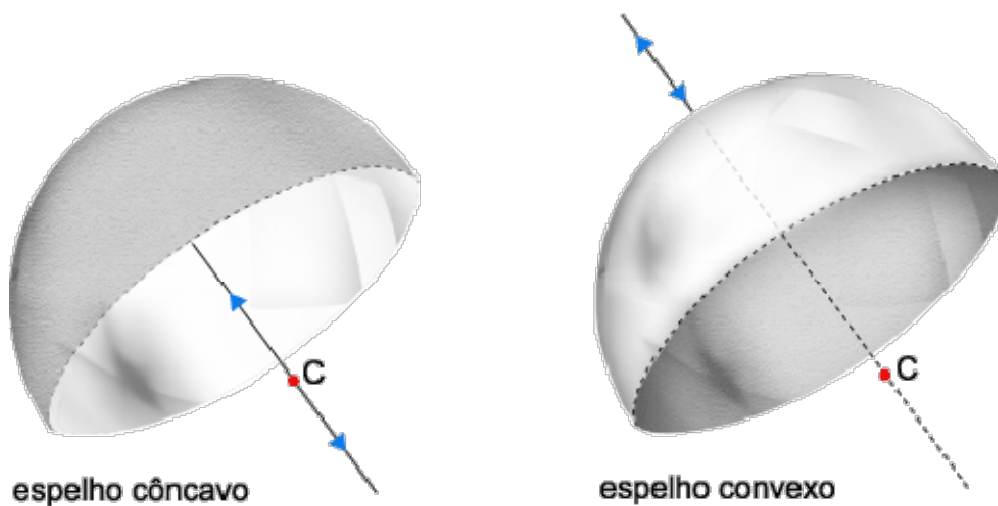
O ângulo de incidência (i) é sempre igual ao ângulo de reflexão

$$\hat{i} = \hat{r}$$

onde esses ângulos são sempre medidos a partir da normal . A figura abaixo mostra as direções de incidência e de reflexão quando aplicamos essas leis para raios incidentes em posições e ângulos diferentes.



Note-se que se um raio passa pelo centro de curvatura, o ângulo de incidência é nulo. Portanto, o ângulo de reflexão também o será. Portanto, o raio volta na mesma direção de onde veio se ele incidir passando pelo centro de curvatura (ou tem seu prolongamento) passando pelo centro de curvatura. Essa situação é ilustrada na figura a seguir tanto para um espelho côncavo (no qual o raio passa, de fato, pelo centro) quanto no caso do espelho convexo. Nesse último caso, o raio de luz incidente tem apenas o seu prolongamento passando pelo centro da curvatura.



3: Aspectos geométricos dos espelhos esféricos

Para analisarmos o processo da formação da imagem de um objeto em frente a um espelho devemos recorrer a algumas grandezas de natureza geométrica associadas a um espelho esférico, como mostra a figura, e conforme as definições abaixo:

O centro de curvatura (C), como já vimos antes, é o centro da esfera que deu origem à calota.

O raio de curvatura (R) da esfera é a distância do centro da esfera até qualquer ponto sobre a mesma.

O vértice do espelho (V) é o ponto equidistante de qualquer ponto sobre as extremidades da calota (o seu polo).

O eixo principal (e.p.) é aquele que passa pelo vértice do espelho e pelo seu centro de curvatura.

Eixo secundário: é qualquer reta paralela ao eixo principal.

Plano frontal: é qualquer plano perpendicular ao eixo principal.

Plano meridiano é qualquer plano que corta a calota passando pelo eixo principal (plano do papel é um plano meridiano).

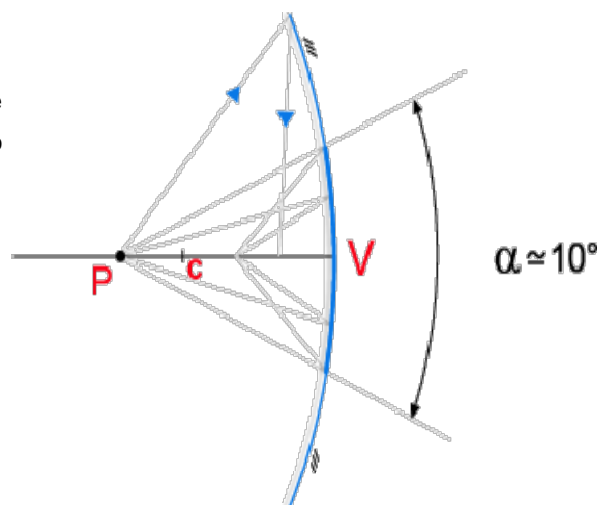
Abertura do espelho (α) é o maior ângulo sobre a calota medido a partir do centro da curvatura (o ângulo associado às extremidades da calota).

4: Foco de um espelho

Na análise da localização da imagem de um objeto qualquer o foco de um espelho desempenha um papel importante.

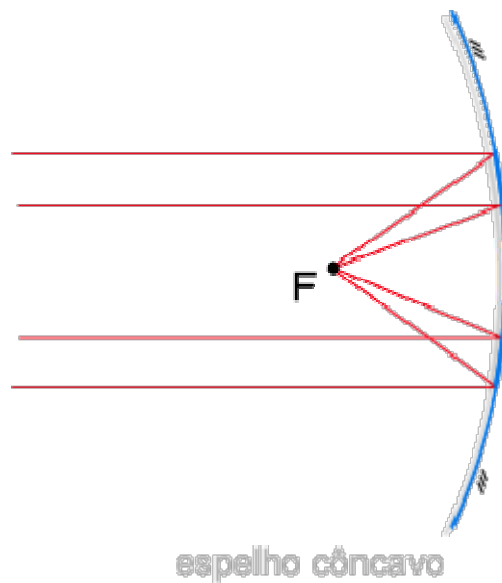
Um sistema óptico, o qual consegue conjugar a um ponto objeto, um único ponto como imagem é dito estigmático. Os espelhos esféricos só são estigmáticos para os raios que incidem próximos do seu vértice V e com uma pequena inclinação em relação ao eixo principal (condições de Gauss). Um espelho com essas propriedades é conhecido como espelho de Gauss (em homenagem a quem fez essa descoberta).

Um espelho que não satisfaz as condições de Gauss (incidência próxima do vértice e pequena inclinação em relação ao eixo principal) é dito astigmático. Um espelho astigmático conjuga a um ponto uma imagem parecendo uma mancha (um borrão).

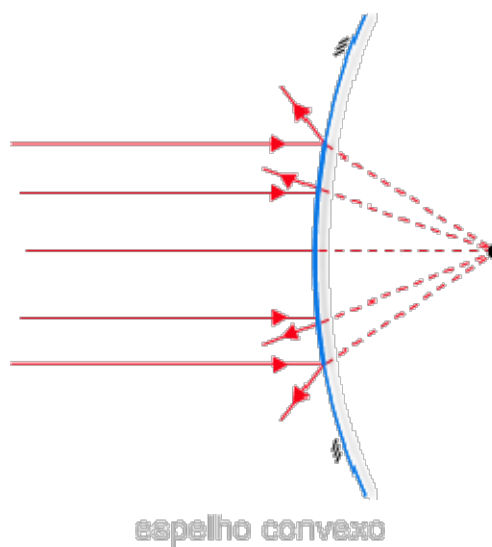


Um espelho de Gauss deve ter, necessariamente, uma abertura muito pequena ($\alpha \leq 10^\circ$). De agora em diante estudaremos apenas os espelhos de Gauss.

Para os espelhos côncavos de Gauss pode ser verificado que todos os raios luminosos que incidirem ao longo de uma direção paralela ao eixo secundário passam por (ou convergem para) um mesmo ponto F - o foco principal do espelho (ou simplesmente foco do espelho).



Para os espelhos convexos uma propriedade análoga aos espelhos côncavos. Nesse caso é a continuação do raio refletido que passa pelo foco. Tudo se passa como se os raios refletidos se originassem do foco.



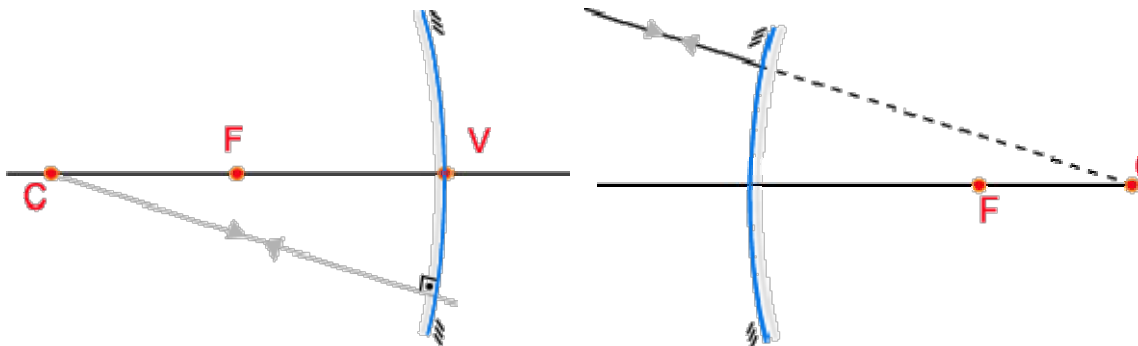
O foco de um espelho de Gauss é um ponto ao longo do eixo principal equidistante do centro de curvatura C e do vértice V.

5: Determinação de imagens puntiformes - Método gráfico

Para determinarmos a posição da imagem de um ponto que emite raios luminosos (ponto luminoso) colocado numa posição P diante de um espelho esférico devemos analisar o que acontece com os vários raios de luz emitidos pela fonte. Na realidade, o trabalho fica enormemente facilitado ao nos lembrarmos que o ponto imagem é único e ele seria determinado pelo ponto onde se cruzam (ou se interceptam os raios refletidos). Basta, portanto, considerarmos apenas dois raios luminosos. Fica a critério de cada um a escolha desses raios. É mais fácil considerarmos dois dentre os seguintes casos.

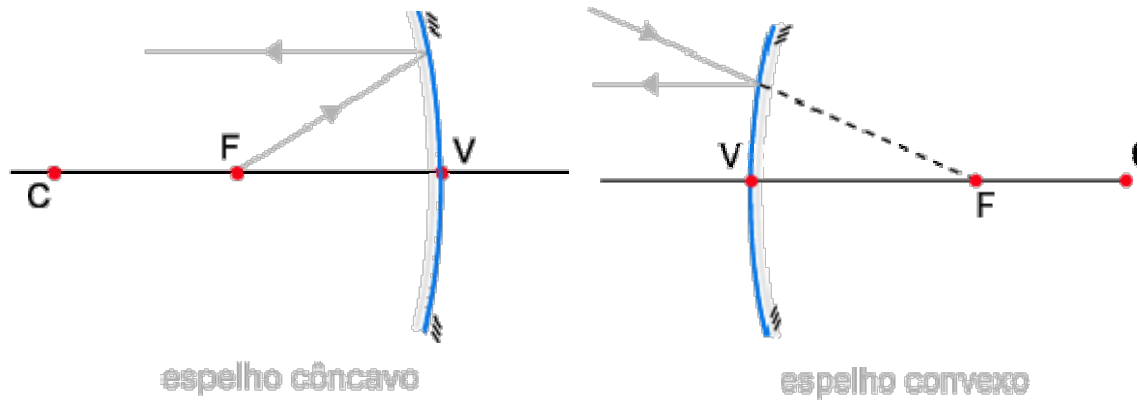
1. Raio de luz passando pelo centro de curvatura

Como todo raio de luz que incidir passando (ou efetivamente ou apenas o seu prolongamento) pelo centro de curvatura volta sobre si mesmo, um dos raios pode ser tomado passando pelo centro da curvatura. O refletido é facilmente determinado.



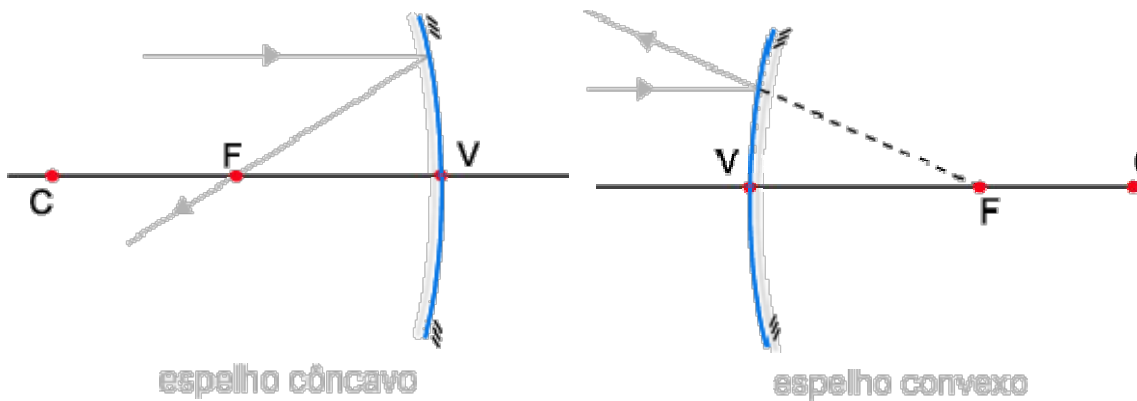
2. Raio luminoso incidente passando (ou sua continuação) pelo foco

Nesse caso, o raio refletido sairá paralelamente ao eixo principal.



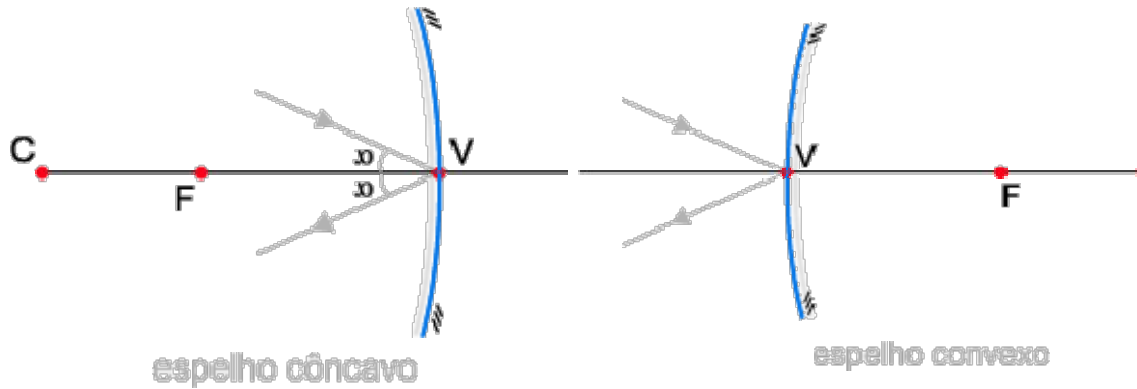
3. Raio de luz incidente paralelamente ao eixo principal

O raio refletido, como argumentado antes, passará (ou sua continuação no caso de espelho convexo) pelo foco.



4. Raio de luz passando pelo vértice

Nesse caso, o raio refletido formará o mesmo ângulo (em relação à normal pelo vértice) que o raio de incidência.



6: [Imagens de objetos extensos - Método gráfico](#)

Nesta seção analisaremos a determinação, utilizando o método gráfico, de imagens de objetos extensos. Nos limitaremos a analisar objetos diante de um espelho esférico e colocados perpendicularmente ao eixo principal.

Como estaremos lidando com espelhos de Gauss (com abertura pequena) o processo descrito a seguir se aplica rigorosamente apenas para objetos pequenos.

As imagens de um objeto podem ser classificadas em imagens reais (quando são formadas diante do espelho) e imagens virtuais (formadas atrás do espelho). Importante lembrar nesse contexto que as imagens reais são formadas quando do encontro dos raios refletidos ao passo que na imagem virtual temos a formação da imagem resultante do encontro do prolongamento desses raios.

Um objeto pode igualmente ser real ou virtual. No caso dos espelhos, dizemos que o objeto é virtual se ele se encontra atrás do espelho. Nesse caso, o próprio objeto é formado pelo prolongamento dos raios luminosos e não pelos próprios.

Um arranjo que permite a formação de um ponto objeto virtual no caso de um espelho esférico pode ser obtido colocando-se diante do espelho esférico uma lente convergente. Nesse caso, os raios luminosos paralelos incidentes levam (como efeito da focalização devido à lente) à formação de um objeto virtual.

No caso de espelhos esféricos a imagem de um objeto pode ser maior, menor ou igual (caso muito raro) ao tamanho do objeto.

A imagem pode ainda aparecer invertida em relação ao objeto. Se não houver sua inversão dizemos que ela é direita.

As duas fotos abaixo ilustram algumas dessas características nos casos de espelhos côncavos e convexos.

Pretende-se, nesse estudo, efetuar determinações das características da imagem (sua localização) em relação ao vértice do espelho. O tamanho relativo ao objeto (maior, menor ou igual) se ela é invertida ou não e se é real ou virtual.

Determinar a imagem de uma forma precisa (atribuindo-se valores para o seu tamanho, por exemplo) requer o uso do método analítico. No entanto, para uma determinação apenas das características da mesma basta o uso do método gráfico.

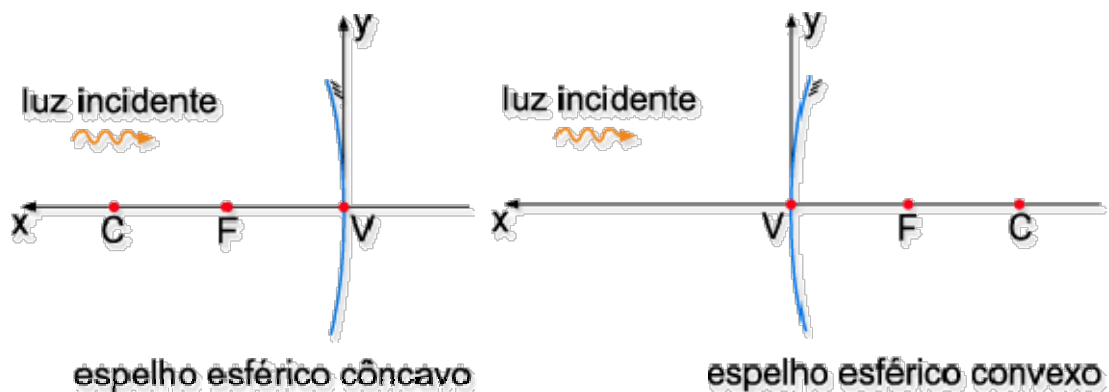
O método gráfico se torna útil e enormemente simplificado ao analisarmos as imagens de apenas dois pontos do objeto em frente ao espelho. Usualmente, tomamos o ponto sobre o eixo principal (ponto A) e o ponto do objeto mais afastado desse (uma das suas extremidades (ponto B)). A análise das imagens desses dois pontos nos permite inferir as características da imagem.

Para exemplificar o procedimento todo, consideremos o caso de um objeto extenso em frente de um espelho esférico localizado entre o foco e o vértice.

7: Método analítico

O método analítico permite determinar com precisão a localização, o tamanho da imagem, bem como determinar se houve ou não a inversão da mesma. O método é particularmente útil no caso de objetos extensos.

O que é essencial no método analítico é o uso de um sistema de coordenadas cartesianas. Trata-se de um referencial com origem no vértice do espelho esférico. Tomamos os eixos x e y adotando-se a seguinte convenção.



Eixo X

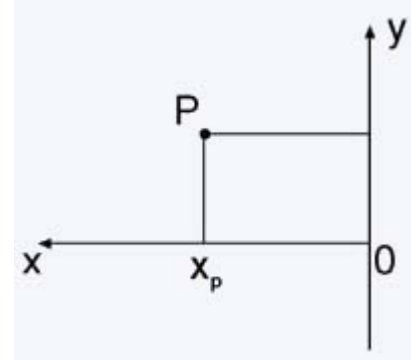
O eixo das abscissas (o eixo x) é tomado coincidindo com o eixo principal. Ele é orientado no sentido contrário ao da luz incidente.

Eixo Y

O eixo das ordenadas (o eixo y) é perpendicular ao eixo principal e tem o sentido ascendente.

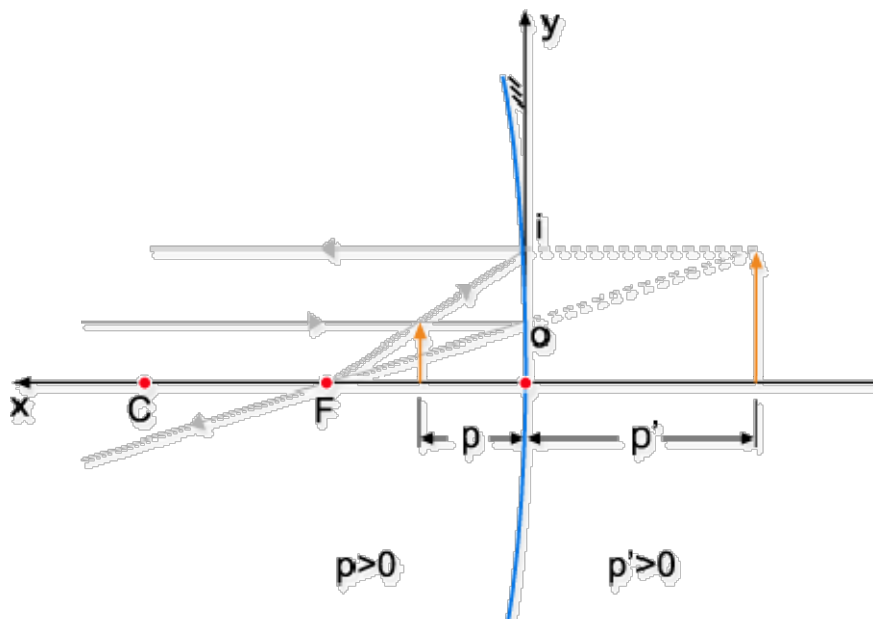
Um sistema de referência para o qual se adota a convenção para espelhos esféricos acima é conhecido como referencial de Gauss.

Num referencial de Gauss, a cada ponto do objeto ou da imagem corresponde um par de coordenadas (x, y) . Um ponto P do objeto tem coordenadas (x_p, y_p) .



De grande interesse é o caso em que o objeto é esguio o suficiente (uma vela, por exemplo) para que possamos atribuir apenas um valor para a coordenada x de qualquer ponto do objeto (isto é, válido se ele for suficientemente fino). Nessas circunstâncias podemos falar de uma coordenada x do objeto e uma outra coordenada para a imagem. Atribuímos os símbolos p e p' para as abscissas do objeto e da imagem. Denominamos ainda de f o valor da abscissa associada ao foco e R o valor da coordenada abscissa associada ao centro de curvatura.

O ponto extremo do objeto é caracterizado pela abscissa p e pela ordenada y . A ordenada y associada ao ponto extremo do objeto damos o nome de i . A ordenada associada ao extremo da imagem designamos por o .



Resumindo

Abscissas

- p - coordenada abscissa (coordenada x) do objeto
- p' - coordenada ordenada (coordenada x) das imagens
- f - coordenada abscissa (coordenada x) do foco

R - coordenada abscissa (coordenada x) do centro de curvatura

Ordenadas

i - ordenada (coordenada y) do extremo do objeto

o - ordenada (coordenada y) do extremo da imagem

8: Consequências da notação e do referencial de Gauss

Todo referencial de Gauss é tal que objetos em frente ao espelho têm para qualquer ponto sobre o mesmo, abscissas positivas. Objetos atrás do espelho têm abscissas negativas. Em particular, temos

$p > 0$ para objetos reais ($p < 0$ para objetos virtuais)

$p' > 0$ para imagens reais ($p' < 0$ para imagens virtuais)

$f > 0$ para espelhos côncavos ($f < 0$ para espelhos convexos)

$\frac{i}{o} > 0$ se a imagem não for invertida

$\frac{i}{o} < 0$ se a imagem for invertida.

9: Aumento linear transversal

Denomina-se de aumento linear transversal ao quociente

$$A = \frac{i}{o} .$$

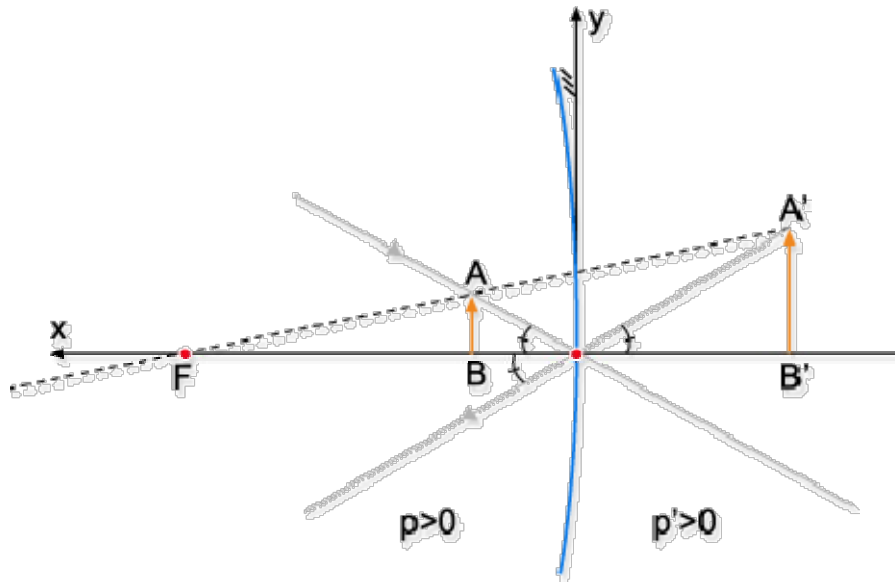
Pode-se relacionar esse quociente ao quociente das abscissas da imagem (p') e do objeto p . Para se obter tal relação basta considerar dois triângulos. Um deles é formado pelas duas extremidades do objeto (pontas A e B) e o vértice e o outro pelas extremidades da imagem (pontas A' e B'). Tais triângulos são semelhantes (3 ângulos iguais). Portanto, daí segue que os lados são proporcionais

$$\frac{\overline{B'A'VB'}}{\overline{BA} = \overline{VB}}$$

(observação sobre a notação: $\overline{B'A'}$ representa a medida do comprimento do segmento $B'A'$).

E, portanto, de acordo com as definições segue

$$\frac{i}{o} = -\frac{p'}{p}$$



10: Equação fundamental dos espelhos esféricos

Dadas a distância focal e posição do objeto é possível determinar, analiticamente, a posição da imagem. Sendo f, p e p' as respectivas abscissas, pode-se mostrar que a relação entre essas três grandezas é:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Portanto, uma vez conhecidas duas abscissas, a terceira fica inteiramente determinada.

A equação acima é também conhecida como equação de Gauss e é uma equação fundamental no estudo dos espelhos esféricos.

A demonstração da equação de Gauss faz uso da semelhança de triângulos FVD com FB'A'.

11: Associação de espelhos

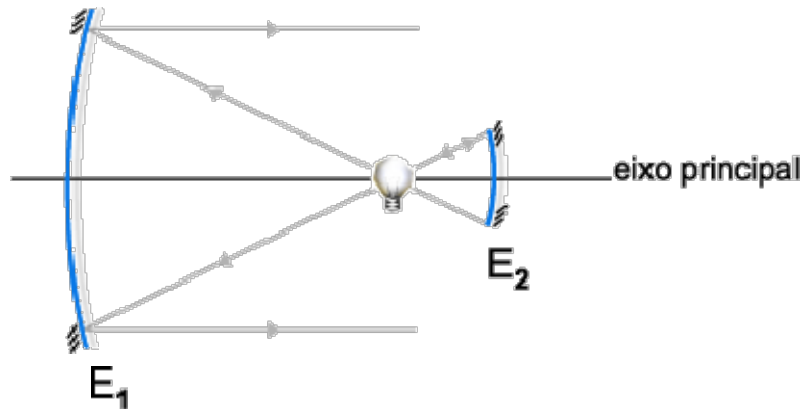
Existem sistemas ópticos bastante complexos envolvendo um grande número de dispositivos ópticos com espelhos. Em algumas experiências fazemos uso de dois espelhos esféricos.

Para a obtenção de imagem (ou imagens) resultante da associação de dois espelhos, o procedimento é bastante simples. Para cada espelho, além do objeto devemos analisar a

imagem (ou imagens) da imagem formada no outro espelho.

O número de imagens em alguns casos pode ser muito grande.

Existem várias aplicações práticas de associação de espelhos. Vamos analisar como funciona um holofote construído com dois espelhos esféricos côncavos associados, a fim de se obter um feixe paralelo de luz, com alta eficiência no aproveitamento da luz emitida por um pequeno filamento aquecido.



O filamento deve ser posicionado no foco do espelho E_1 . A luz emitida para o lado do espelho E_1 sairá praticamente como um feixe paralelo ao eixo principal do conjunto. A luz emitida para o lado oposto atingirá em parte o espelho E_2 . Este espelho deve ser posicionado de forma que o seu centro de curvatura coincida com a posição do filamento. Assim sendo, a luz dirigida para o espelho E_2 será refletida de volta para o espelho E_1 , passando pelo foco deste último. Dessa forma, o raio refletido em E_1 sairá também paralelamente ao eixo principal.

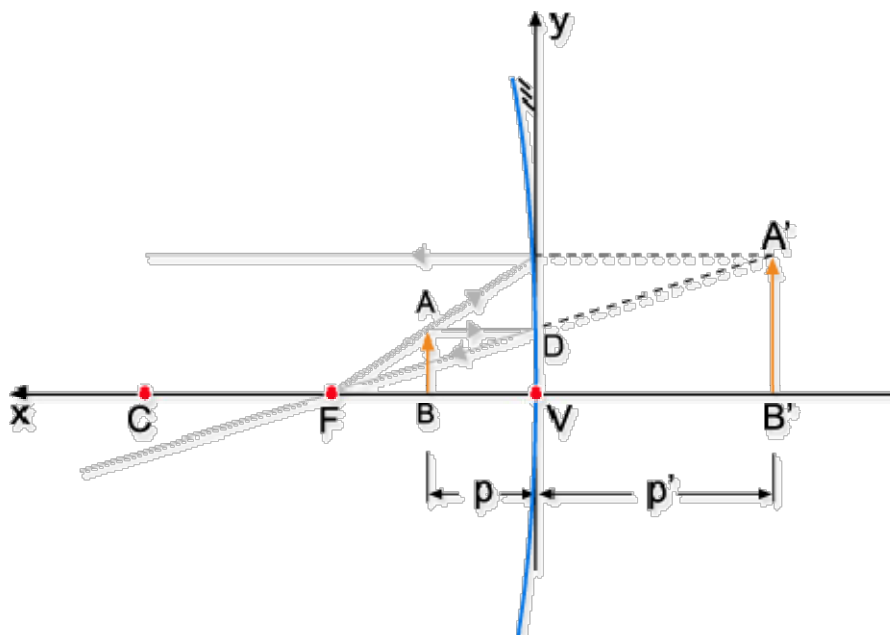
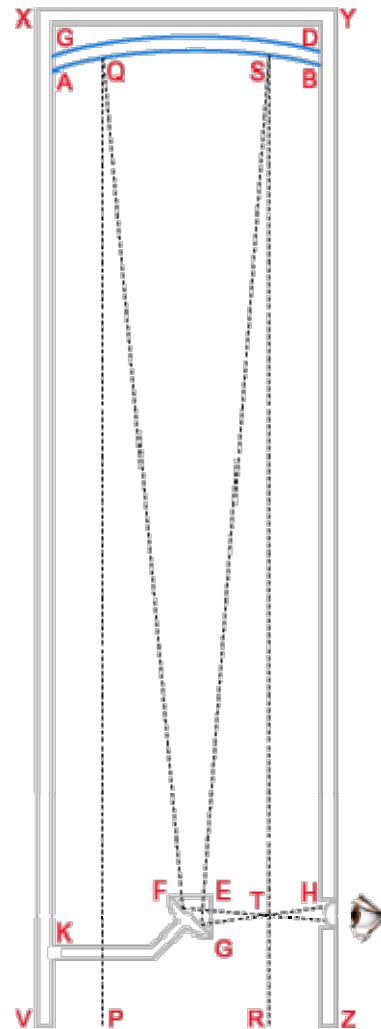
Obviamente, o filamento deve ser pequeno comparado com o espelho E_1 e o espelho E_2 deve ser menor do que o outro. Espelhos não esféricos são frequentemente usados a fim de melhorar a eficiência. Observe como são concebidos os faróis de carros modernos.

Outra aplicação de associação de espelhos pode ser vista em telescópios. Isaac Newton, no seu livro "Optics" relata as dificuldades na obtenção de imagens nítidas e descreve a construção de dois telescópios refletoras (1668).

O esquema de um de seus telescópios está mostrado na figura ao lado.

A peça ACDB é de vidro polido com a superfície refletora em CD. Para conduzir a luz proveniente do espaço para o olho do observador, conforme ilustra o desenho, existe um prisma FGE onde se dá a reflexão na superfície FG. Os telescópios de reflexão são menores que os de refração onde são usadas associações de lentes.

Nos telescópios de reflexão conhecidos atualmente como telescópios Newtonianos, em lugar do prisma usa-se um espelho plano.



Semelhança dos triângulos FVD com FB'A' e lembrando as convenções de sinais. Também

$$\overline{VD} = \overline{BA} = o \text{ e } \overline{B'A'} = i.$$

$$\frac{\overline{VD}}{B'A'} = \frac{\overline{FV}}{FB'}$$

$$\frac{o}{i} = \frac{\overline{FV}}{FB'}$$

$$\frac{o}{i} = \frac{f}{f - p'} \text{ (lembrando que } p' \text{ é } < 0)$$

Por outro lado, como já vimos,

$$\frac{o}{i} = -\frac{p}{p'}$$

assim:

$$\begin{aligned} \frac{f}{f - p'} &= -\frac{p}{p'} \\ -fp' &= p(d - p') \\ -fp' &= pf - pp' \\ pp' &= pf + fp' \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por fp' teremos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{p}$$

12: No cotidiano

1. Em elevadores

Nas portas dos elevadores muitas vezes são colocados espelhos esféricos para que o ascensorista possa ver de dentro do elevador os possíveis usuários que se encontrem no saguão.

2. Em carros e motocicletas

Os espelhos esféricos aumentam o campo de visibilidade se comparados com espelhos planos. Assim, nos espelhos retrovisores de carros e motos, alguns são espelhos esféricos.

Note como a noção de distância e de velocidade de aproximação dependem do tipo de espelho utilizado.

3. Espelhos de energia solar

Espelhos côncavos são utilizados para focalizar a luz solar num determinado ponto ou região. O calor pode ser utilizado até para fundir metais.

4. Holoforte

Num holofote uma lâmpada é colocada no foco de um espelho côncavo de modo que o feixe refletido seja formado por raios paralelos.

5. Faróis

Note como é o farol de um carro. A lâmpada emite luz para todos os lados e o fundo do farol reflete adequadamente a luz aproveitando mais eficientemente a luminosidade. Algumas luminárias com lâmpadas fluorescentes são dotadas de uma superfície refletora.

13: Demonstração

Utilize uma panela de inox como superfície refletora ou então um espelho de maquiagem (não plano) se não houver equipamento específico à disposição.

(No laboratório de demonstrações tem um porquinho → imagem real)