01. Eletrostática

1. Cargas

A eletrostática é a área do eletromagnetismo que se interessa em estudar a situação na qual as cargas elétricas estão em repouso. Mais geralmente, diríamos que essa área estuda a situação na qual as cargas elétricas (que se encontram distribuídas num determinado objeto) estão em equilíbrio. Esse é o sentido da palavra estática agregada á palavra eletro formando a palavra eletrostática.

Distribuição de Cargas

Consideremos primeiramente o caso em que as cargas estão em repouso e se encontram em posições fixas. Devemos estabelecer, primeiramente, uma distinção entre dois tipos de distribuição de cargas. Devemos tratar, separadamente, os casos de uma distribuição discreta e uma distribuição contínua de cargas.

No caso de uma distribuição de cargas estamos falando de um pequeno número de partículas carregadas. Essa situação pode ser descrita como sendo aquela na qual temos um conjunto de cargas Q_1, Q_2 ..., Qn ocupando as posições caracterizadas pelos vetores de posição $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$. Essa situação é ilustrada na figura abaixo.

A carga total da distribuição de cargas Q será dada pela soma (ou somatório) das cargas das partículas que compõe a distribuição. Ou seja:

$$Q = \sum_{i=1}^{N} Q_i$$

Onde o símbolo $\sum$ representa a soma sobre os índices das cargas.

O caso de uma distribuição discreta é um pouco diferente. Nesse caso estamos falando de um número muito grande de cargas e, portanto, faz mais sentido caracterizar a distribuição falando em densidade de uma distribuição. Ao falarmos em densidade de uma distribuição estamos especificando quanto de carga existe por unidade de volume (distribuição volumétrica de cargas), ou por unidade de superfície (distribuição superficial de cargas), ou ainda por unidade de comprimento (distribuição linear de cargas). Temos assim três tipos de distribuição de interesse em Física. Cada tipo de distribuição de carga será designada por uma letra grega diferente. Adotaremos a seguinte notação:

$\rho(\vec{r})$ representa uma distribuição volumétrica de cargas

Observe-se que, e de acordo com a expressão acima, a densidade de cargas pode variar de ponto para ponto no espaço. Por isso indicamos que a distribuição depende do ponto cuja posição é indicada pelo vetor $\vec{r}$.

Fig $\sigma(\vec{r})$ - representa uma distribuição superficial (de superfície) de cargas

A densidade superficial de cargas pode variar de ponto para ponto ao longo de uma superfície.. Por isso indicamos que a distribuição superficial depende do ponto cuja posição é caracterizada pelo vetor

Fig $\lambda(\vec{r})$ - representa uma distribuição linear (de linha) de cargas

Como nos casos anteriores, a densidade superficial de cargas pode variar de ponto para ponto ao longo de uma curva, ou linha.

fig

Dada uma distribuição de cargas, a carga total será dada pela soma da distribuição de cargas sobre o volume (ou superfície) no qual a distribuição está confinada. Sendo a carga total dada por *Q*. Teremos:

$$Q = \iiint \rho(\vec{r})\,dV$$

Onde o símbolo $\iiint$ acima representa a soma sobre o volume da região contento as cargas. É o análogo do somatório no caso discreto da expressão (OOOO) Nos demais casos temos, de maneira análoga, temos para uma distribuição superficial de cargas que a carga total será dada por:

$$Q = \iint \sigma(\vec{r})\,dS$$

E no caso de uma distribuição linear, temos a expressão:

$$Q = \int \lambda(\vec{r})\,dl$$

2. Equações Fundamentais

As equações fundamentais da eletrostática são duas equações de primeira ordem para o campo elétrico:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \rho(\vec{r})$$

$$\nabla \times E(\vec{r}) = 0$$

A primeira equação significa que a existência de uma dada densidade de carga dá origem a um campo elétrico. O significado físico da segunda equação é que a energia mecânica de uma partícula que se mova sob a ação de um campo eletrostático se conserva. De fato, de (mmmm) segue que uma solução para esta equação é:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

Onde V é a função Potencial Eletrostático. Eq. (oooo) implica que o campo elétrico é um campo conservativo, e portanto a energia mecânica é conservada. Substituindo-se a expressão (nnnn) em (mmmm) chegamos a uma equação a derivadas parciais de segunda ordem. Tal equação é a equação de Laplace:

$$\nabla^2 V\left(\vec{r}\right) = -\varepsilon_0 \rho\left(\vec{r}\right)$$

A solução geral da equação acima é dada pela expressão

$$V\left(\vec{r}\right) = \varepsilon_0 \iiint G\left(\vec{r} - \vec{r}\right)\rho\left(\vec{r}\right) d^3 r$$

Onde G na equação acima é a função de Green que satisfaz a equação:

$$\nabla^2 G\left(\vec{r}\right) = -\delta\left(\vec{r}\right)$$

Cuja solução é:

$$G\left(\vec{r} - \vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}\right|}$$

Assim, a expressão para o potencial eletrostático mais geral será

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \rho(x, y, z) \frac{1}{\left(\left(x - x\right)^2 + \left(y - y\right)^2 + \left(z - z\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} dxdydz$$

Para as distribuições superficial e linear de cargas respectivamente, teremos:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint \sigma(\vec{r}) \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}\right|} dS$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \lambda(r) \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}\right|} dl$$

3. O Campo Eletrostático

Para uma distribuição estática de cargas o campo elétrico que resulta de uma tal distribuição (o campo eletrostático) será dado pelas expressões seguintes.

No caso de uma distribuição discreta, ou seja, contento N cargas, o campo eletrostático será dado pela soma dos campos elétricos produzidos por cada uma das cargas individuais. Ou seja, no ponto $\vec{r}$ o campo elétrico será dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3}$$

A expressão acima decorre do princípio da superposição. O efeito de N cargas é igual ao efeito, mas somado, produzido por cada uma delas individualmente.

Ao passo que para uma distribuição superficial, o campo será dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint \sigma(\vec{r}) \frac{\vec{r} - \vec{r}}{\left|\vec{r} - \vec{r}\right|^3} dS$$

Enquanto que para uma distribuição linear vale a expressão:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \lambda(r) \frac{\vec{r} - \vec{r}}{\left|\vec{r} - \vec{r}\right|^3} dl$$